Some more good (t, m, s)-nets

Jürgen Bierbrauer
Department of Mathematical Sciences
Michigan Technological University
Houghton, Michigan 49931 (USA)
Yves Edel
Mathematisches Institut der Universität
Im Neuenheimer Feld 288
69120 Heidelberg (Germany)

February 8, 1997

Abstract

We present generator matrices fore some good (t, m, s)-nets, which are non-binary and nonternary.

Introduction

The ordering is with increasing strength $m - t$, and in this category with increasing t. Let a q-ary net (t, m, s) be given. If $m < s$, then the first columns per block form the check matrix if a q-ary linear code $[s, s - m, m - t + 1]$. Schmid has shown that the existence of a net (t, m, s) implies a q-ary net $(t, m - 1, s)$. This in turn therefore implies a code $[s, s - m + 1, m - t]$. This is an interesting observation as a code $[n, k, d]$ does not in general imply a code $[n, k + 1, d - 1]$. This link to codes enables us to give tighter bounds on s than can be obtained from general methods like the LP-bound, by using the accumulated knowledge on nonexistence of linear codes as documented in the data base [1]. We stress that these bounds are valid for digital nets, defined over $\mathbb{F}_q$, not for arbitrary nets.

The new quaternary parameters

(1,5,10)
(2,6,19)
(3,7,31)
(1,6,8)
(2,7,16)
(3,8,23)

The new pentanet parameters

(1,5,12)
(2,6,23)
(3,7,41)
(4,8,74)
(2,7,18)
(3,8,28)
(4,9,43)
(2,8,14)
(3,9,22)

1 The quaternary case

1.1 Quaternary net $(1,5,10)$

$s \leq 11$ as $[12,7,5]_4$ does not exist.

100	011	033	031	012	132	232	022	211	121
011	100	001	021	021	111	131	221	031	211
021	031	100	010	000	100	000	100	210	210
010	010	010	100	010	010	110	110	200	300
000	000	010	000	100	100	100	100	100	100

1.2 Quaternary net $(2, 6, 19)$

$s \leq 29$ as $[30, 24, 5]_4$ cannot exist.

100	012	011	031	031	022	112	233	311	231	031	221	211	332	111	011	112	031	012
031	100	011	001	011	031	111	111	111	231	131	011	231	231	121	131	311	021	221
021	021	100	030	000	000	110	110	130	030	220	100	100	010	200	310	300	310	010
000	010	020	100	010	010	100	100	010	110	110	200	010	100	210	300	210	200	310
010	000	010	010	100	000	100	000	100	100	100	100	000	000	000	100	200	300	300
000	000	000	000	000	100	100	010	000	000	000	010	100	100	100	100	100	100	100

1.3 Quaternary net $(3, 7, 31)$

021	100	031	032	021	012	032	132	122	211	121	021	111	301	332	111	031	211	011	121	332	301	021	211	101	202	221	011	331	331	201
031	032	100	031	011	021	011	131	121	121	231	111	021	121	201	331	321	231	301	111	131	021	331	331	121	121	101	031	211	101	231
020	021	021	100	020	010	030	110	100	130	000	200	100	110	010	200	100	300	030	320	200	120	300	010	210	320	120	330	020	320	320
010	020	010	000	100	000	010	100	100	010	100	100	200	000	100	100	200	010	110	210	010	110	100	300	210	000	210	310	300	000	300
000	010	000	010	000	100	000	100	010	100	100	100	100	010	010	010	010	100	100	100	000	000	010	010	100	310	000	200	110	210	310
000	000	000	000	010	000	100	100	000	000	010	010	010	100	100	100	100	100	100	100	000	000	000	000	000	000	100	100	200	300	300
100	000	000	000	000	000	000	100	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

1.4 Quaternary net $(1, 6, 8)$

1000	0111	0332	0213	0313	0331	1121	2312
0122	1000	0211	0331	0211	0011	1311	2211
0221	0121	1000	0310	0010	0110	1200	1110
0100	0210	0310	1000	0100	0100	1010	0100
0100	0100	0100	0100	1000	0100	0100	1000
0010	0000	0000	0000	0100	1000	1000	1000

1.5 Quaternary net $(2, 7, 16)$

1000	0231	0221	0231	0223	0012	0131	1021	2131	3212	3021	2331	0221	2031	0121	3321
0311	1000	0131	0111	0311	0211	0021	1111	2221	0111	2111	1311	3031	0011	2111	1131
0121	0311	1000	0010	0210	0010	0310	1210	1110	2110	0110	2010	3110	0310	2210	1010
0110	0300	0300	1000	0100	0300	0000	1200	0100	1200	2100	0200	1200	2300	2000	0100
0200	0010	0210	0200	1000	0100	0100	0000	1100	1300	2100	0100	0100	1300	3300	3300
0100	0100	0000	0100	0000	1000	0100	0100	0100	0100	0100	1100	1000	1100	1100	2100
0000	0000	0100	0000	0000	0100	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

1.6 Quaternary net $(3, 8, 23)$

1000	0211	0211	0213	0021	0123	0212	0331	1222	2132	3123	3121	2112	0321	2312	0221	3312	3312	1212	0332	0131	1321	2312
0022	1000	0231	0331	0111	0211	0211	0211	1121	2311	0011	2111	1011	3311	0221	2211	1211	3311	3011	1211	1011	3311	2211
0121	0121	1000	0310	0110	0110	0010	0010	1210	1110	2310	0310	2010	3110	0210	2010	1110	3010	2110	3310	0210	1110	0110
0210	0210	0110	1000	0100	0000	0200	0000	1000	0100	1000	2100	0200	1000	2000	2100	0100	0100	0100	2000	1200	1100	3300
0100	0300	0200	0000	1000	0000	0100	0100	0000	1100	1100	2000	0300	0000	1000	3000	3000	1000	0100	0100	1100	2000	2100
0000	0100	0100	0000	0000	1000	0000	0000	0000	0100	0100	0000	1100	1000	1000	1000	2000	3000	0000	0000	1000	1000	3000
0100	0000	0000	0100	0100	0100	1000	0100	0100	0000	0000	0100	0000	0100	0100	0100	0100	0100	1000	1000	1000	1000	2000
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

2 The pentacase

2.1 Pentanet $(1, 5, 12)$

The table has $s = 10$, upper bound $s \leq 18$.

100	000	000	010	000	100	100	100	100	100	010	100
000	100	010	000	010	300	100	110	200	210	100	400
010	010	100	011	041	310	410	100	310	010	300	010
011	021	021	100	011	321	231	011	041	231	411	311
021	041	031	031	100	022	022	121	422	211	412	131

2.2 Pentanet $(2, 6, 23)$

The table has $s = 12$, upper bound $s \leq 43$.

100	000	000	000	000	000	100	100	100	100	100	000	100	100	100	100	100	000	100	100	100	100	100
000	100	000	000	000	000	100	200	300	100	200	100	200	400	100	000	200	100	000	400	300	400	200
000	000	100	010	010	010	100	300	300	400	000	200	210	100	000	400	000	110	210	210	210	210	210
010	010	010	100	011	021	110	410	010	010	210	210	000	010	310	210	010	000	400	300	200	100	200
011	011	021	021	100	011	021	031	331	231	241	211	021	021	031	041	341	211	411	131	231	411	321
031	012	022	031	012	100	041	021	032	041	033	041	211	331	311	221	342	241	431	111	132	212	441

2.3 Pentanet $(3, 7, 41)$

The table has $s = 16$, upper bound $s \leq 97$.

100	000	000	000	000	000	000	100	100	100	100	100	000	100	100	100	100	100	000
000	100	000	000	000	000	000	100	200	300	100	200	100	200	400	100	000	200	100
000	000	100	000	000	000	000	100	300	300	400	000	200	200	100	000	400	000	100
000	000	000	100	010	010	010	100	410	000	000	200	200	000	000	300	210	010	010
010	010	010	010	100	011	021	010	000	310	210	210	210	010	010	010	000	300	200
011	011	031	011	011	100	031	021	011	031	021	031	031	241	341	341	211	311	221
041	012	011	021	012	041	100	011	031	021	022	032	041	011	031	021	041	021	031

100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	000	100	100	100	100	100	100
000	300	400	200	400	300	400	100	400	000	200	300	000	100	100	400	400	400	200	400	100	400
200	000	200	200	400	000	300	200	000	000	300	100	200	400	400	000	000	400	300	400	000	300
410	310	110	210	010	310	110	210	010	110	210	410	210	310	010	110	010	010	410	110	410	310
400	400	400	300	000	000	000	000	200	100	110	110	110	110	010	010	110	110	310	110	120	220
431	421	221	431	031	031	041	041	041	041	021	011	001	021	331	131	341	201	241	431	101	401
032	011	041	011	421	341	311	442	221	131	111	101	321	421	301	121	321	231	212	411	331	311

2.4 Pentanet $(4, 8, 74)$

The table has $s = 18$, upper bound $s \leq 221$.

100	000	000	000	000	000	000	000	100	100	100	100	100	000	100	100	100	100	100	000	100	100	100	100	100
000	100	000	000	000	000	000	000	100	200	300	100	200	100	200	400	100	000	200	100	000	300	400	200	400
000	000	100	000	000	000	000	000	100	300	300	400	000	200	200	100	000	400	000	100	200	000	200	200	400
000	000	000	100	000	000	000	000	100	400	000	000	200	200	000	000	300	200	000	000	400	300	100	200	000
000	000	000	000	100	010	010	010	000	000	300	200	200	200	000	000	000	010	300	200	410	410	410	310	010
010	010	010	010	010	100	011	031	010	010	010	010	010	010	210	310	310	200	310	210	400	400	200	400	000
011	011	011	011	021	011	100	021	021	021	031	031	021	031	041	031	041	011	041	041	011	011	021	021	421
012	021	031	041	011	012	021	100	031	041	021	011	022	041	021	032	031	031	011	042	021	041	011	031	022

100	100	100	100	100	100	100	100	100	000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	000	100	000	100
300	400	100	400	000	200	300	000	100	100	400	400	400	400	000	000	400	100	400	100	300	100	000	100	100
000	300	200	000	000	300	100	200	400	400	000	000	400	200	000	400	300	000	100	000	300	200	200	400	400
300	100	200	000	100	200	400	200	300	000	100	000	000	400	100	300	000	400	200	000	100	300	300	000	000
010	010	010	210	110	110	110	110	110	010	010	110	110	410	410	410	010	010	010	310	110	110	210	110	010
000	000	000	000	000	000	000	000	010	310	110	310	210	310	310	410	010	010	010	010	010	010	010	020	420
321	331	441	231	131	141	141	341	401	301	101	321	211	311	421	231	021	031	041	031	041	041	041	011	011
041	021	021	011	041	011	031	042	011	031	041	031	041	031	041	031	301	411	111	341	131	101	241	322	401

000	100	100	000	100	100	100	100	000	100	100	100	000	100	000	100	100	100	100	100	100	100	100	100
100	100	400	100	400	400	100	300	100	400	300	200	100	200	100	300	200	200	300	000	200	400	000	100
100	000	400	300	100	200	100	300	300	400	200	000	100	400	000	200	400	100	400	400	200	300	400	300
100	000	300	100	400	000	300	000	100	400	000	100	400	000	200	100	200	300	100	400	200	400	100	200
010	210	210	210	210	310	210	010	010	310	410	110	010	210	210	010	010	310	210	010	210	410	310	410
320	220	220	120	420	420	220	020	020	020	020	020	420	120	420	220	130	430	330	230	230	330	230	330
011	001	001	021	001	031	021	131	301	321	231	231	411	141	241	441	401	301	311	311	331	231	331	331
341	221	231	101	411	231	321	141	341	341	221	211	431	111	231	441	421	441	401	421	401	311	221	231

2.5 Pentanet $(2, 7, 18)$

The table has $s = 12$, upper bound $s \leq 43$.

1000	0000	0100	0000	0100	0100	0000	1000	1000	1000	1000	0000	1000	1000	1000	1000	0100	0100
0000	1000	0000	0000	0000	0000	0000	1000	1000	2000	0000	1000	3000	1000	4000	4000	1000	1000
0000	0000	1000	0100	0000	0100	0100	1000	3100	4000	1100	3100	3000	2100	3100	0100	2000	4000
0100	0100	0000	1000	0110	0010	0310	1100	3400	0100	2000	1000	2100	2000	0000	1100	2300	2200
0110	0110	0410	0110	1000	0121	0441	1310	0110	4410	2210	4310	1210	0210	1410	2010	2210	3410
0211	0131	0211	0131	0321	1000	0211	0211	3311	4211	2311	2211	4411	0111	0421	0111	4311	1011
0412	0141	0221	0311	0311	0411	1000	0231	0431	0312	0321	0113	0221	2412	1111	2121	4221	3121

2.6 Pentanet $(3, 8, 28)$

The table has $s = 16$, upper bound $s \leq 97$.

1000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	1000	1000	1000	1000	0000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
0000	1000	0000	0000	0000	0100	0100	0000	1000	1000	2000	0000	1000	3000	1000	4000	4000	2000	1000	4000	2000	1000	3000	0000	1000	2000	2000	2000
0000	0000	1000	0000	0000	0000	0000	0010	1000	3000	4000	1000	3000	3000	2000	3000	0000	1000	4000	2000	1000	3000	3000	4000	3000	3000	3000	0000
0000	0000	0000	1000	0100	0000	0000	0100	1000	3100	0000	2000	1000	2100	2100	0100	1100	0100	4100	0100	3100	3100	0100	1100	1100	3100	4100	4100
0100	0100	0100	0100	1000	0310	0210	0100	1100	0100	4100	2100	4100	1000	0100	1000	2000	1000	0100	2200	0200	3000	0100	3100	0200	2300	2300	0200
0110	0110	0210	0210	0110	1000	0431	0411	0310	3110	4310	2110	2410	4110	0110	0310	0210	2210	0310	0110	4110	1310	0210	0010	4010	4110	3010	2210
0121	0321	0311	0111	0211	0321	1000	0412	0321	0121	0411	0411	0211	0411	2311	1411	2411	2111	0211	0411	0311	0131	2221	3111	4111	4411	2311	1411
0411	0122	0221	0141	0412	0443	0332	1000	0422	0311	0212	0312	0312	0121	0212	0331	0241	0412	4312	2312	4021	1111	2011	3212	4431	2021	4431	4012

2.7 Pentanet $(4, 9, 43)$

The table has $s = 18$, upper bound $s \leq 221$.

1000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	1000	1000	1000	1000	1000	0000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0000	1000	1000	1000	0000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0000
0000	1000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	1000	1000	1000	2000	0000	1000	3000	1000	4000	4000	2000	1000	4000	2000	1000	3000	0000	1000	1000	4000	3000	1000	1000	0000	1000	0000	3000	2000	3000	3000	0000	4000	2000	1000
0000	0000	1000	0000	0000	0000	0000	0100	0000	1000	1000	3000	4000	1000	3000	3000	2000	3000	0000	1000	4000	2000	1000	3000	3000	4000	3000	3000	0000	4000	0000	2000	3000	3000	1000	4000	0000	0000	1000	1000	1000	0000	2000
0000	0000	0000	1000	0010	0000	0010	0000	0010	1000	1000	3000	0000	2000	1000	2000	2000	0000	1000	0000	4000	0000	3000	3000	0000	1000	1000	3000	3000	2000	4000	3000	0000	1000	0000	1000	1000	2000	1000	3000	3000	3000	0000
0000	0000	0000	0000	1000	0100	0100	0000	0100	1100	1100	0000	4000	2100	4000	1100	0100	1000	2100	1100	0100	2100	0100	3100	0100	3100	0100	2100	4100	0100	2100	3100	4100	2100	0100	3100	0100	4100	1100	3100	4100	4100	0100
0100	0100	0100	0100	0100	1000	0100	0110	0400	1000	0000	3100	4100	2000	2100	4000	0000	0100	0000	2100	0000	0100	4100	1000	0200	0100	4100	4200	1100	0200	0100	1100	1100	0200	4100	4200	0200	2200	4300	2200	1200	4200	2300
0210	0210	0210	0110	0300	0310	1000	0411	0111	1110	0210	0410	0310	0110	0410	0210	2310	1110	2310	2010	0410	0310	0110	0410	2010	3010	4210	3110	4210	0010	0410	0110	0210	1010	2410	3310	0210	0210	4010	1110	3010	4410	1010
0111	0221	0411	0311	0111	0211	0311	1000	0121	1211	0111	0311	0211	0311	0211	0311	0321	0411	0411	0411	4211	2011	4411	1421	2111	3211	4211	4031	2111	0411	0011	0211	0411	0311	0111	0111	2011	3411	2111	4311	4211	3411	1211
0231	0432	0113	0412	0312	0441	0212	0431	1000	1231	0121	0112	0221	0131	0312	0413	0331	0213	0212	0341	0312	0131	0412	0111	0212	0131	0312	0341	0412	2131	2321	1031	3041	1412	2021	3031	2421	3312	2112	2012	2312	1221	4221

2.8 Pentanet $(2, 8, 14)$

The table has $s = 12$, upper bound $s \leq 33$.

10000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	01000	10000	10000	10000	01000	10000	10000
00000	10000	00000	01000	01000	01000	01000	00000	11000	41000	21000	10000	21000	31000
00000	00100	10000	00100	02100	01000	01100	01100	12000	42000	41000	22000	24000	24000
01000	01000	01000	10000	03000	03100	00000	02000	10000	22000	34000	12000	42000	24100
02100	01000	01100	04000	10000	02110	01310	02110	14100	23100	01100	31100	44100	03000
01110	04110	02110	03110	03110	10000	03211	01121	11110	04110	31110	22110	01110	11210
02311	01131	03131	03421	04311	02431	10000	03411	02211	24411	31411	20211	03121	01221
01212	01121	02321	01431	03412	01322	04332	10000	01241	02121	02213	02412	42211	10411

2.9 Pentanet $(3, 9, 22)$

The table has $s = 16$, upper bound $s \leq 56$.

10000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	00000	10000	10000	10000	00000	10000
00000	10000	00000	00000	00000	00000	01000	01000	01000	10000	10000	20000	10000	00000	40000	40000	10000	30000	10000	40000	10000	01000
00000	00000	10000	01000	01000	01000	00000	01000	00000	11000	31000	41000	21000	11000	41000	11000	41000	21000	11000	21000	01000	33000
00010	00010	00010	10000	01100	01000	04000	00000	01000	10000	30000	20000	40000	30000	31000	40000	42000	42000	20000	02000	21000	12000
01000	01000	01000	00100	10000	04100	03100	00100	04100	11000	31000	21000	03000	24000	40000	03000	40000	32000	01000	30000	33000	13000
01100	02100	02100	01000	04000	10000	03110	02110	01210	14100	30100	03100	40100	12100	02100	24100	03100	01100	13100	40100	40100	30100
02100	04100	01200	01110	00110	02110	10000	03311	00311	12110	03310	24110	42210	11110	00110	01210	10110	04110	03210	22110	44110	10110
04311	02211	04411	03211	01121	04321	01121	10000	02141	11121	03221	02411	02221	01121	44121	23111	14121	02211	04311	02211	23311	40211
01412	04312	03212	02412	01232	03432	01322	03212	10000	10211	01323	01121	01432	01322	04411	04121	03131	32121	32221	13231	23131	22412

References

[1] A.E. Brouwer: Data base of bounds for the minimum distance for binary, ternary and quaternary codes,
URL http://www.win.tue.nl/win/math/dw/voorlincod.html or
URL http://www.cwi.nl/htbin/aeb/lincodbd/2/136/114 or
URL ftp://ftp.win.tue.nl/pub/math/codes/table[234].gz.

[2] Y.Edel, J.Bierbrauer: *Construction of digital nets from BCH-codes,* submitted for publication in the Proceedings of MC&QMC, Salzburg 1996.