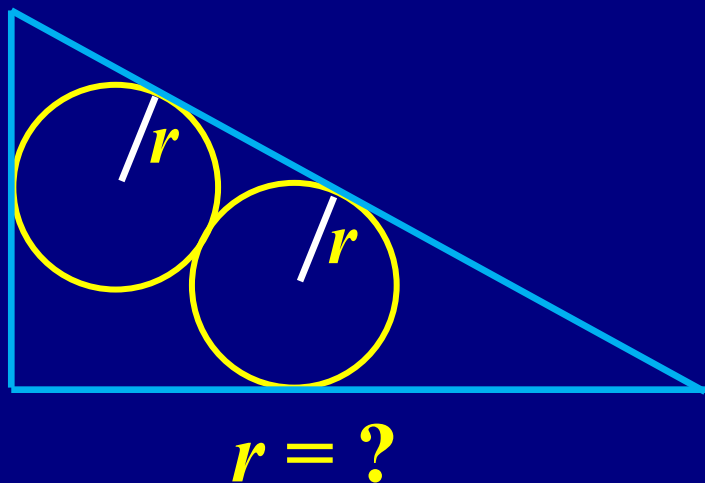


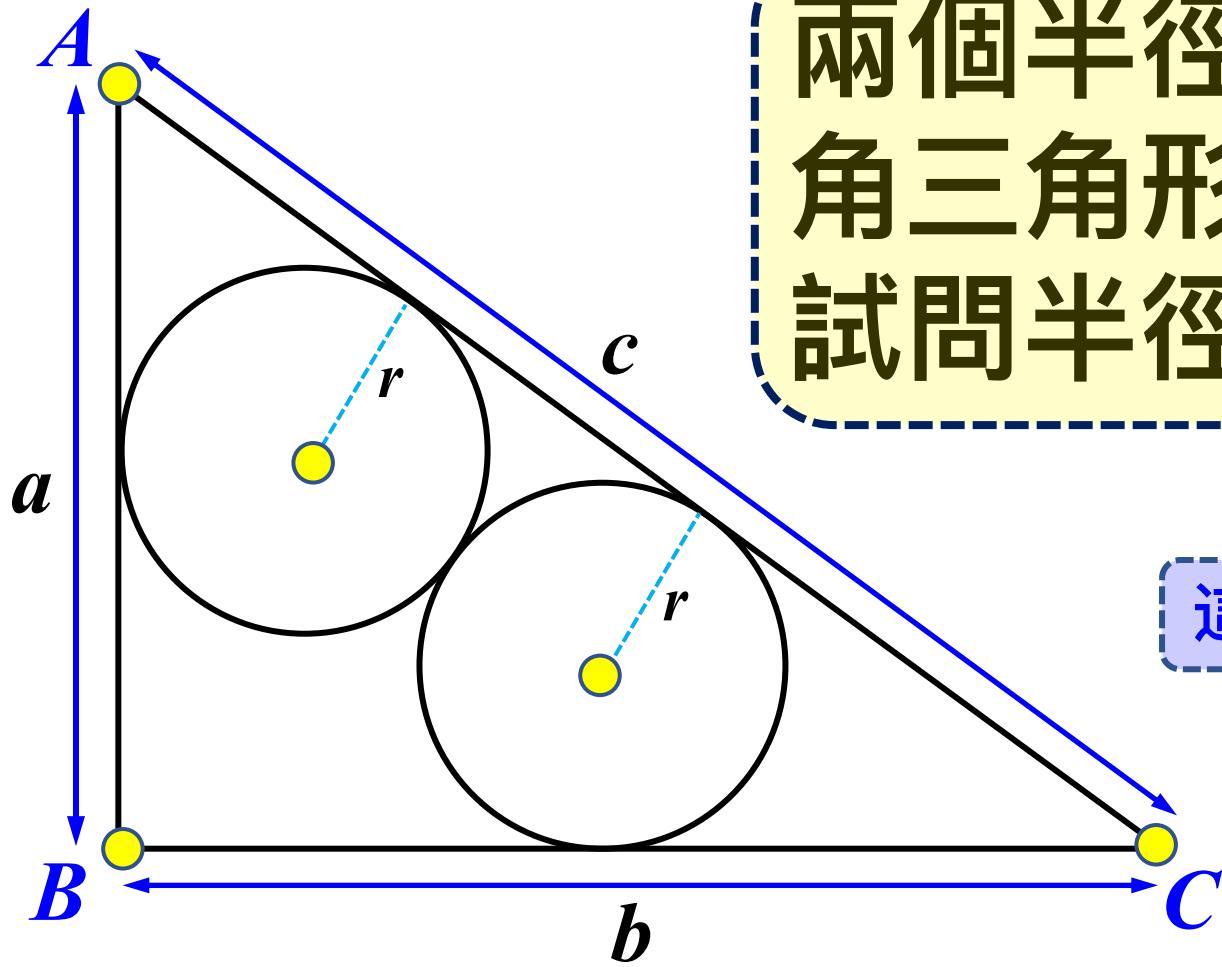
一個簡單的幾何問題

很像一個日本寺廟幾何的問題



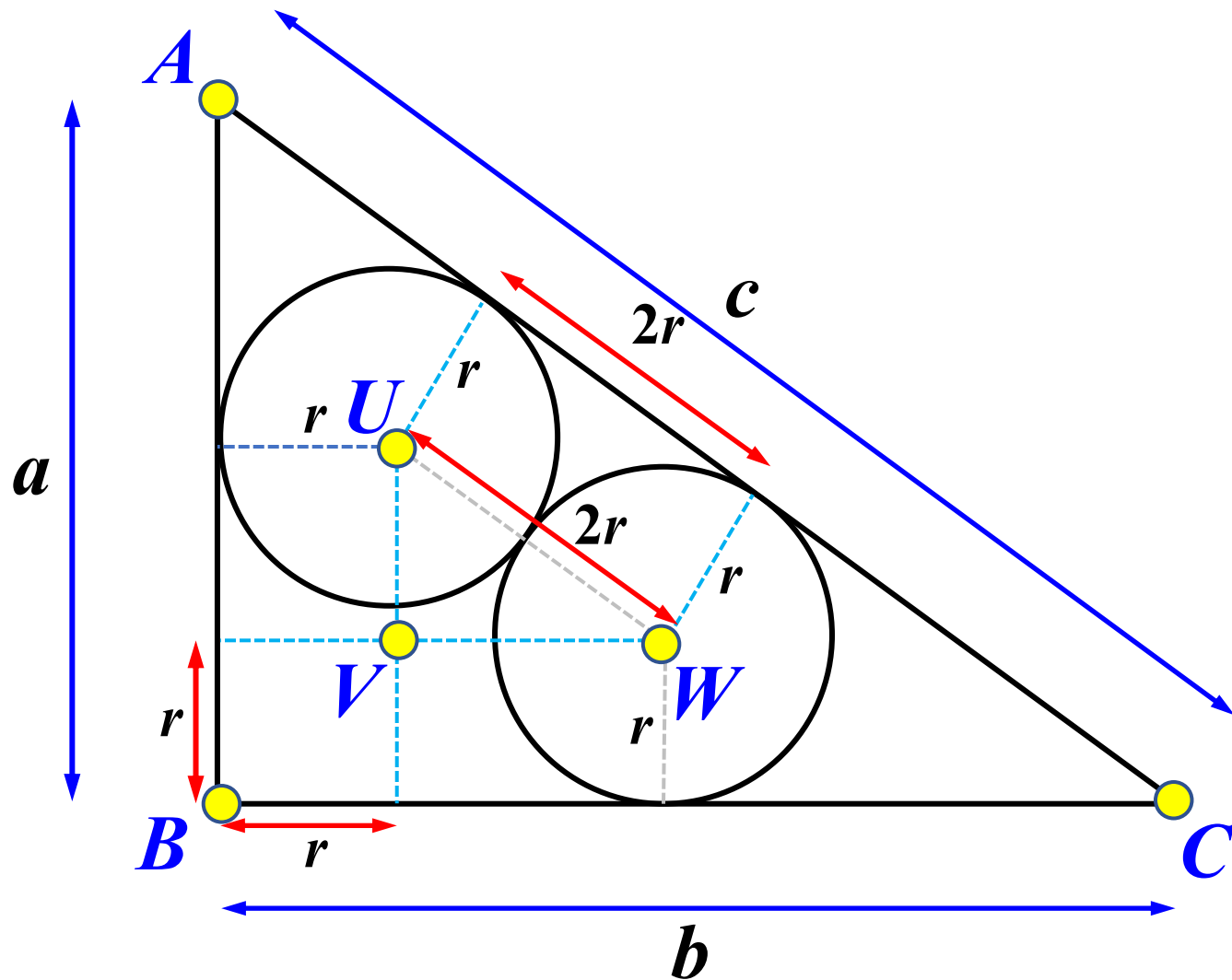
養不教，父之過
教不嚴，師之惰

王應麟 《三字經》

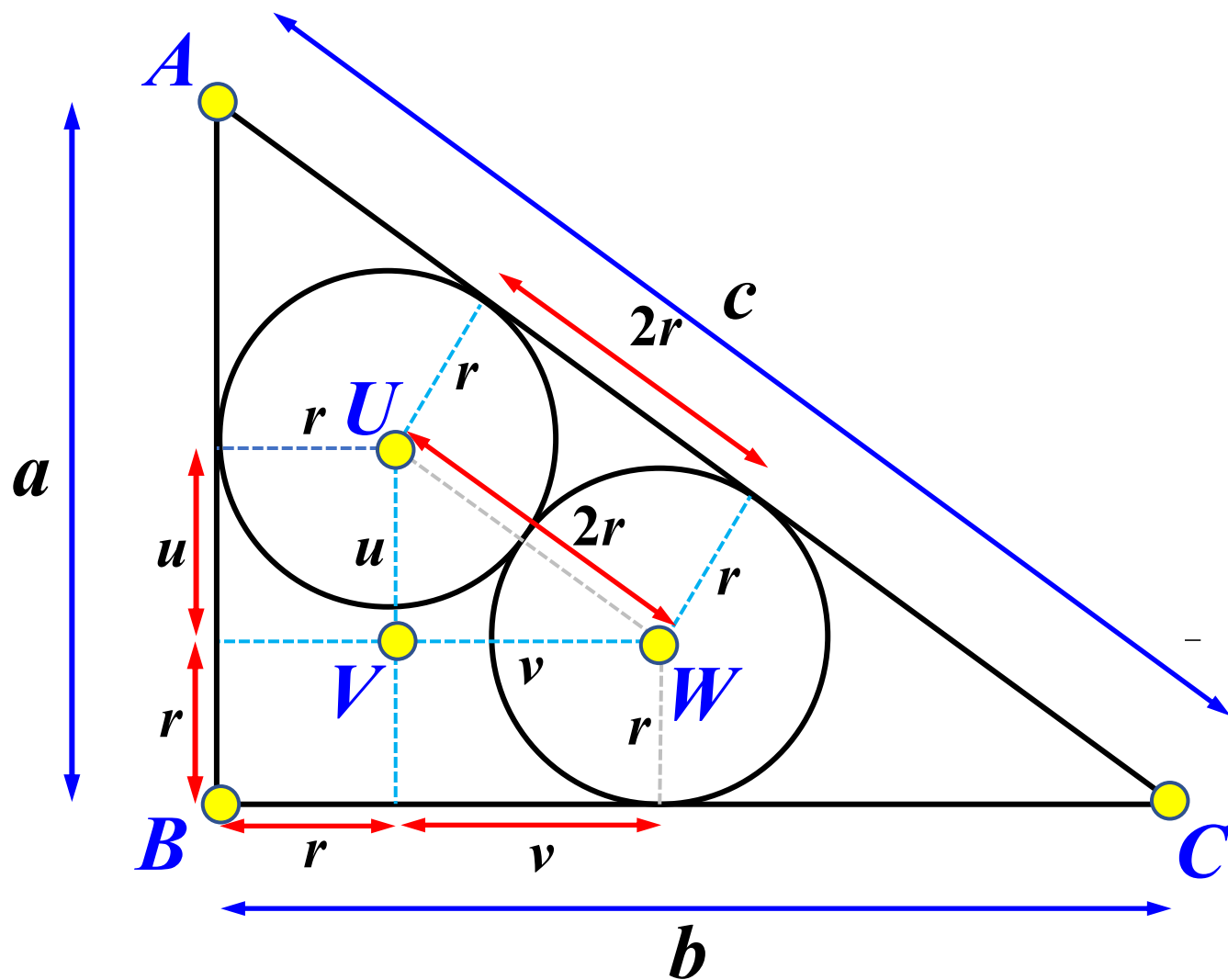


兩個半徑相等的圓互切並與直角三角形二邊相切（如左圖），試問半徑 r 為何。

這兩個圓的存在和唯一會在稍後解釋



- 從圓心向直角三角形的邊作垂線。
- 得到一個較小的直角三角形 $\triangle UVW$ ，此地 $\angle V = 90^\circ$ 。
- $\triangle ABC$ 和 $\triangle UVW$ 相似，因為對應的邊相互平行。



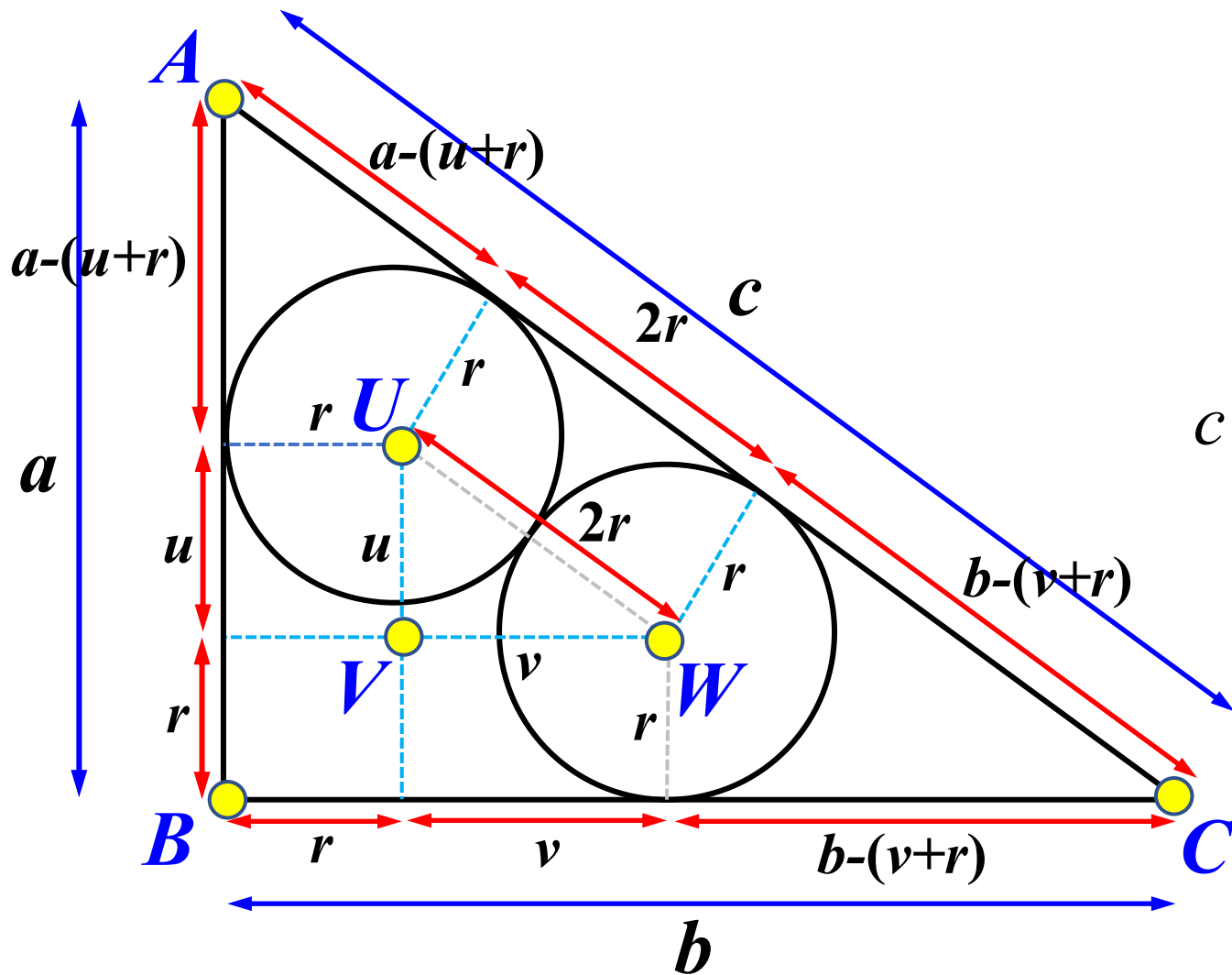
- 令 UV 和 VW 的長分別為 u 和 v 。
- UW 的長為 $2r$ 。
- 因為 $\triangle ABC$ 和 $\triangle UUVW$ 相似，我們得到：

$$\frac{u}{a} = \frac{v}{b} = \frac{2r}{c}$$

- 所以就有：

$$u = 2r \left(\frac{a}{c} \right)$$

$$v = 2r \left(\frac{b}{c} \right)$$



□ 兩條直角邊上剩餘的長度為 $a - (u + r)$ (邊 AB) 和 $b - (v + r)$ (邊 BC)。

□ 結果是，斜邊 AC 的長度為：

$$c = [a - (u + r)] + 2r + [b - (v + r)]$$

$$= (a + b) - (u + v)$$

□ 把 $u = 2r(a/c)$ 和 $v = 2r(b/c)$ 代入上式得到：

$$\begin{aligned}
 \boxed{c} &= (a+b) - (u+v) \\
 &= (a+b) - \left(2r \left(\frac{a}{c} \right) + 2r \left(\frac{b}{c} \right) \right) \\
 &= (a+b) - 2r \frac{a+b}{c}
 \end{aligned}$$

移項

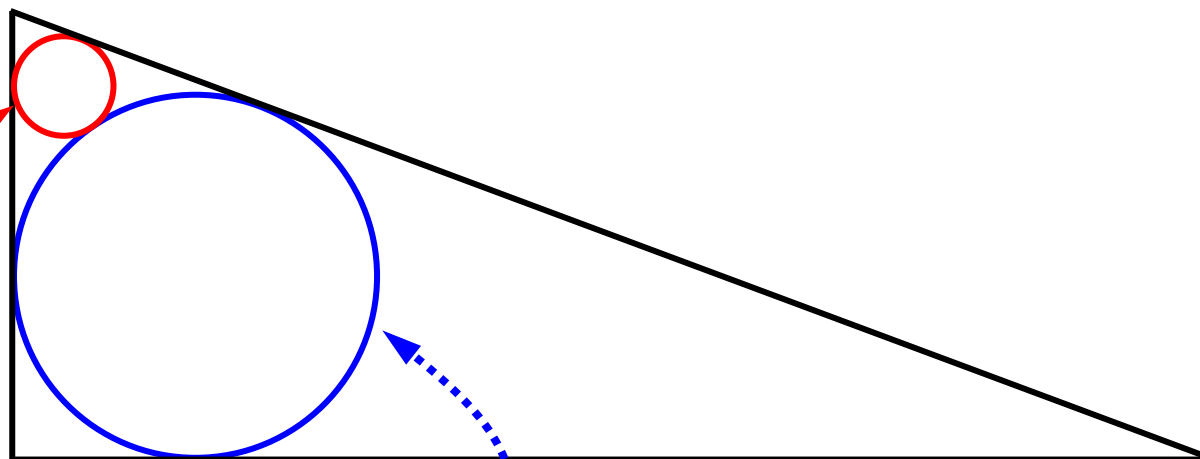
移項

於是得到：

$$\begin{aligned}
 2r \frac{a+b}{c} &= (a+b) - c \\
 r &= \frac{1}{2} \frac{c}{a+b} (a+b - c) \\
 &= \frac{1}{2} \left[c - \frac{c^2}{a+b} \right]
 \end{aligned}$$

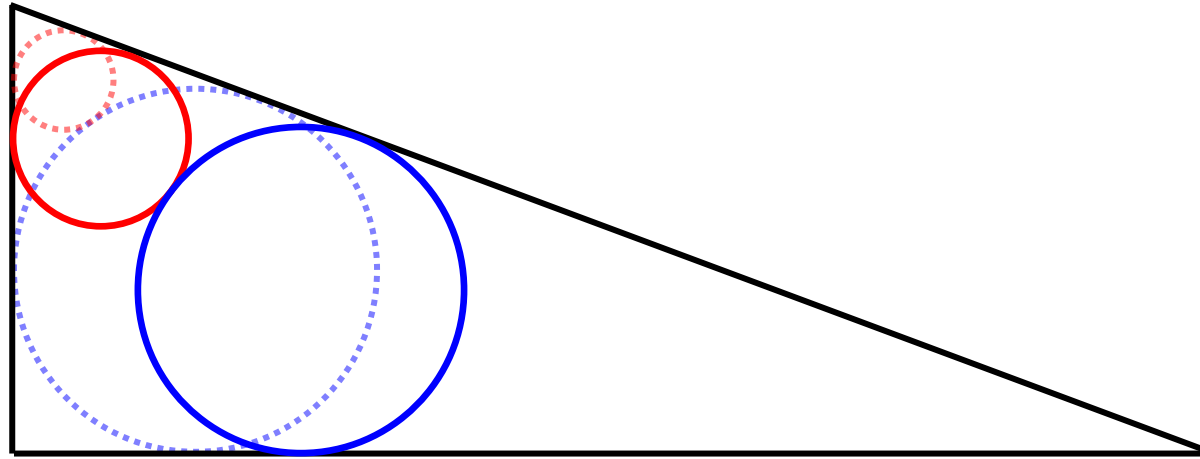
若 $a = 3$, $b = 4$ 和 $c = 5$, 我們有 $r = 5/7$ 。

那兩個圓存在而且唯一嗎？



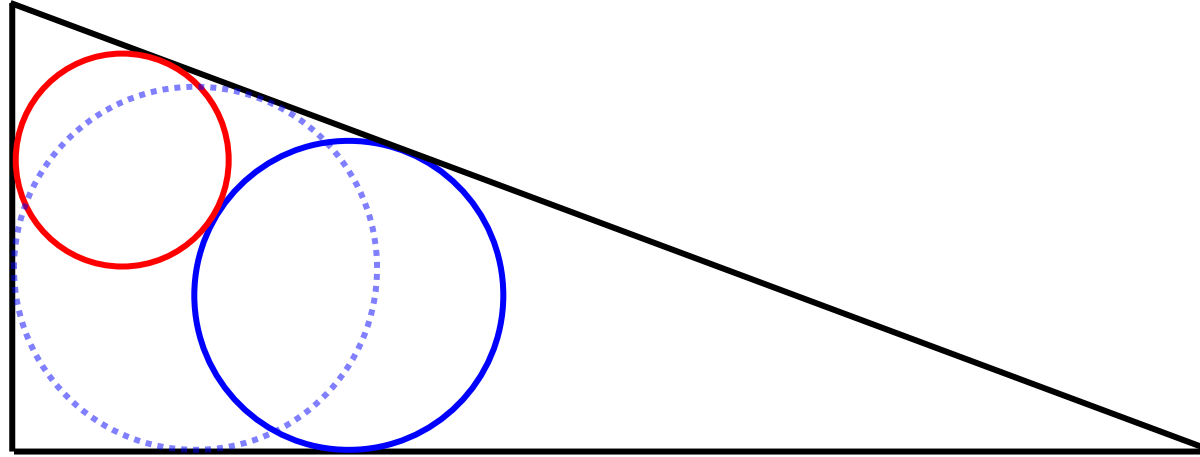
同時和三角形兩個邊相切的圓中最大的是
內切圓（藍色）

另一個和三角形兩邊相切又和內切圓相切
的圓（紅色）較小



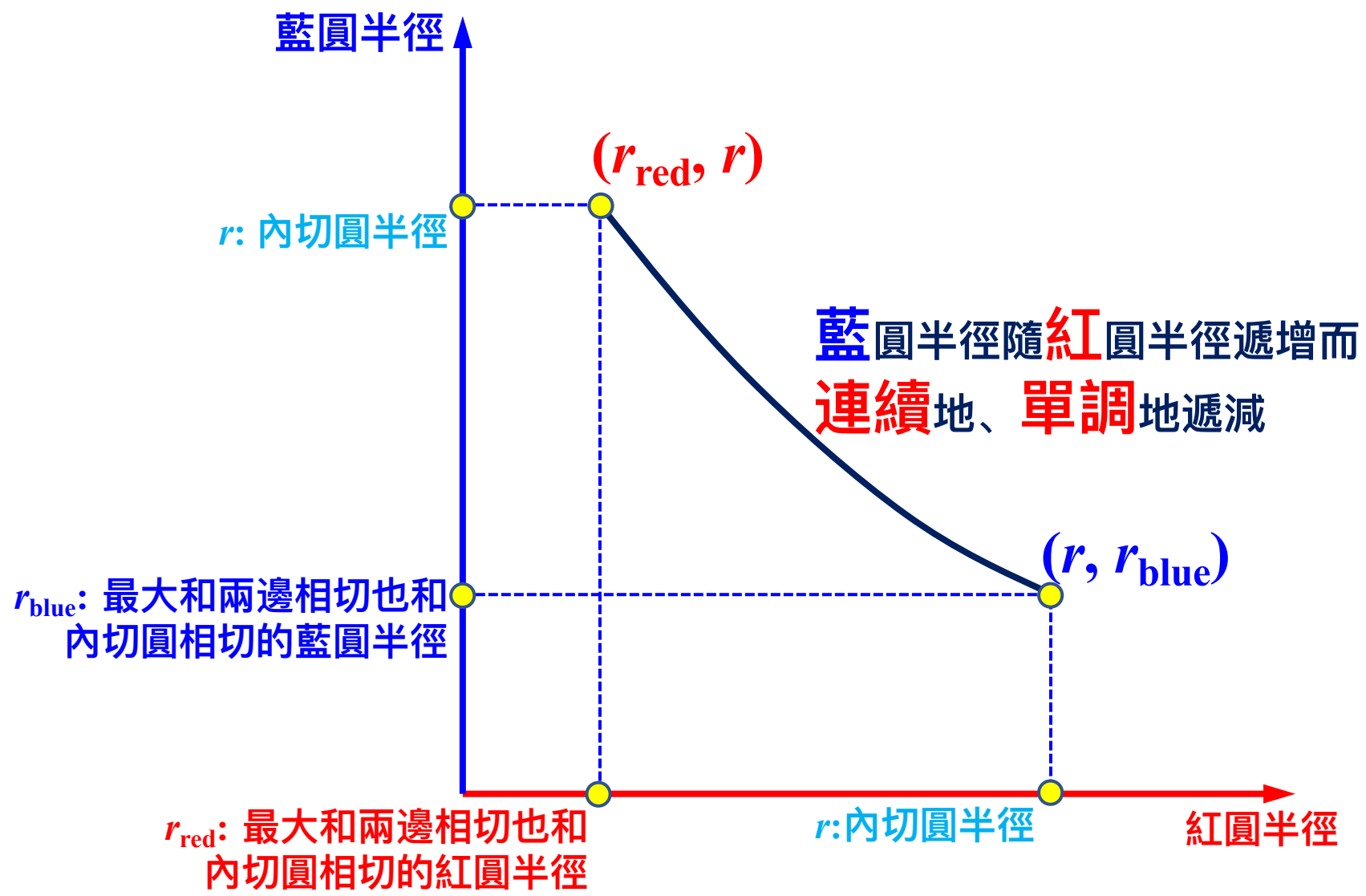
當紅圓逐漸變大，而藍圓又要維持和紅圓相切時，藍圓必定逐漸變小。

不但如此，當紅圓逐漸變大時，藍圓也會連續地而且也單調地變小。

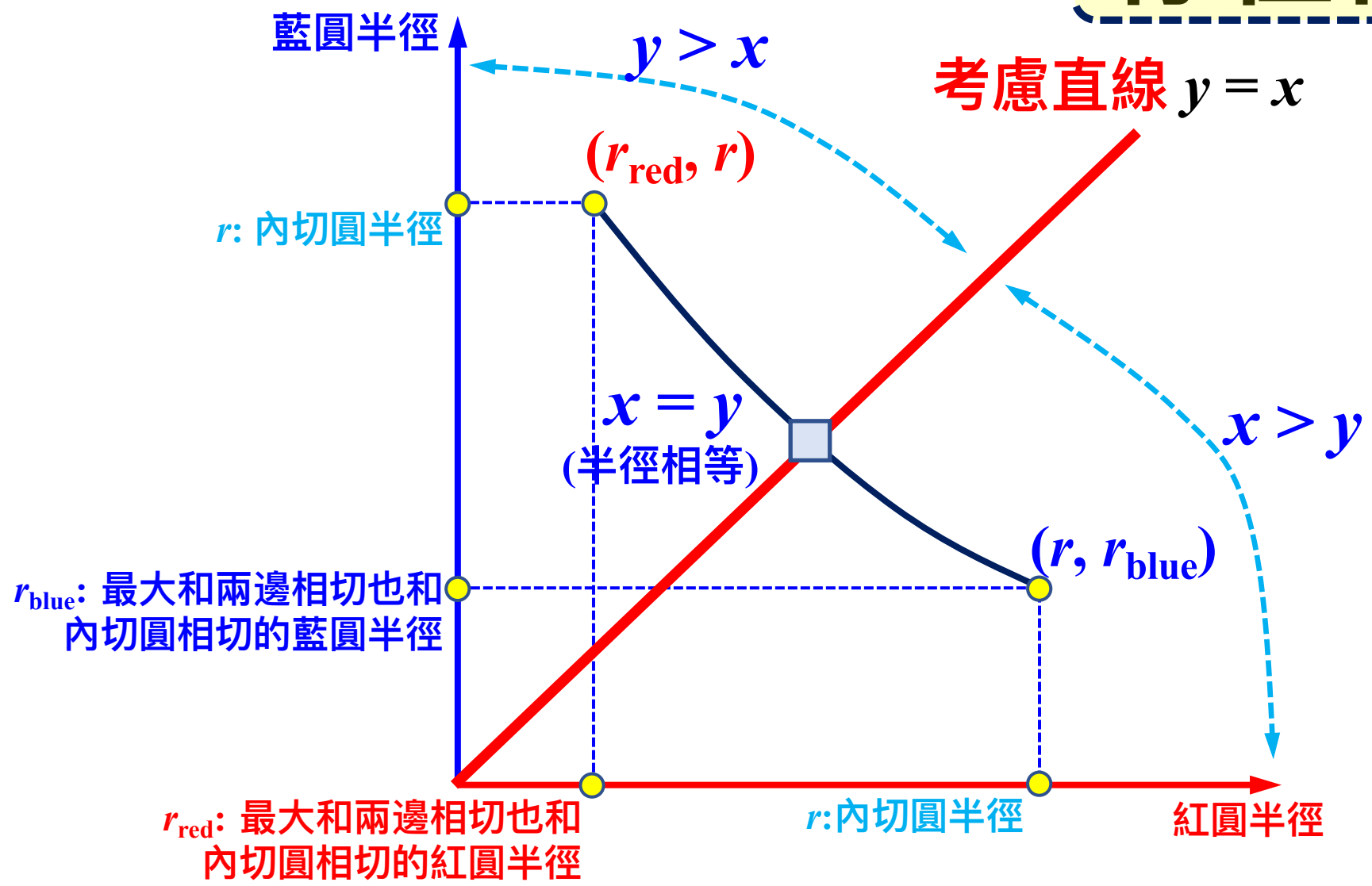


當紅圓逐漸變大（最終變成內切圓時），而藍圓又要維持和紅圓相切，藍圓必定**連續**地而且**單調**地逐漸變小。

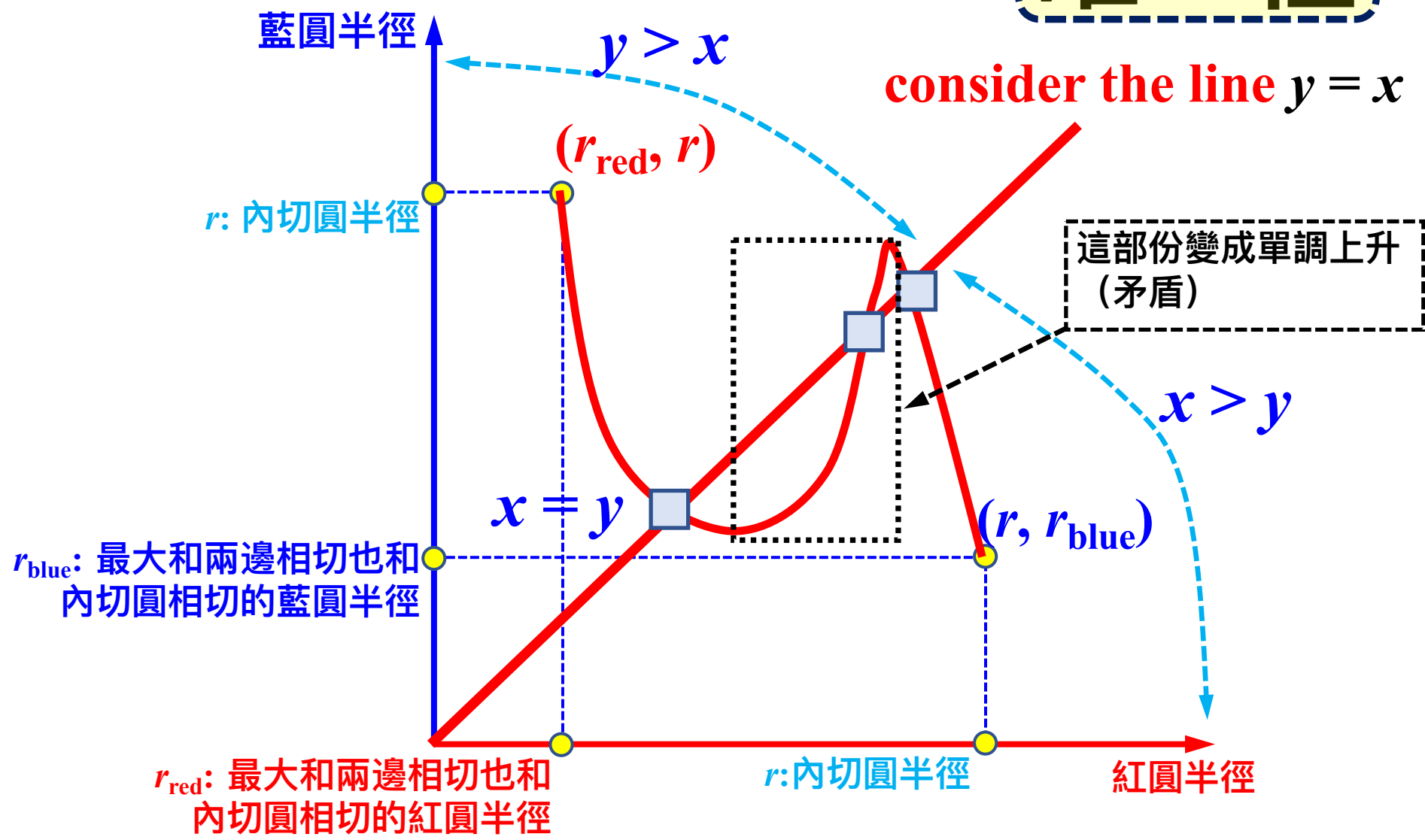
我們由此看出什麼呢？



存在性



唯一性



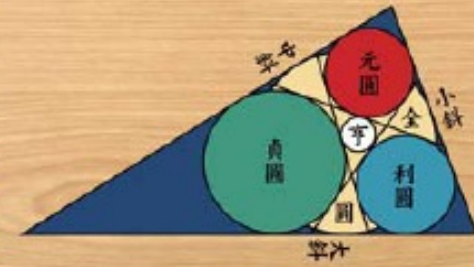
一個有趣的問題

有人說這是個 **日本寺廟幾何**問題

它的確和不少日本寺廟幾何問題有點像，
因為都在於求滿足某些條件的圓的半徑

日本寺院幾何指的是18和19世紀時不少人用文字把幾何問題寫在木板上奉獻給寺/神社的做法

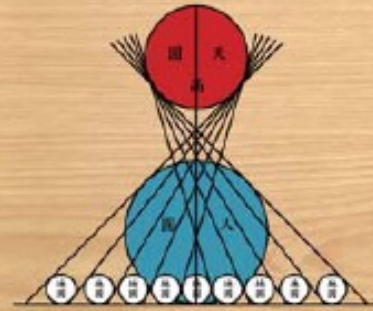
奉納



術曰置全圓徑倍之得四和合問

今有如圖三斜內容全圓及隔三線四圓乃全圓者利貞圓者各切二斜及三線半圓者切三線也只云全圓徑一寸問元亨利貞之圓徑四和幾何

元圓徑
亨圓徑 四和
利圓徑 四和
貞圓徑 四和



今有如圖直線截隔斜天圓人圓各一箇及地圓數箇乃奇數而只云高若干天圓徑若干地圓徑若干問隨地圓箇數得人圓徑術如何

答曰如左

術曰高內減天徑名乾內減地徑名甲乘地徑以高除之加地徑半之名子自之加甲因甲開平方內減子餘乘子以甲半除之加地徑名壹此則裁三以減乾名乙乘地徑以高除之加壹半之名丑自之加甲因乙開平方內減丑餘乘丑以乙半除之加地徑名貳此則裁五以減乾名丙乘地徑以高除之加貳半之名寅自之加甲因丙開平方內減寅餘乘寅以丙半除之加地徑名參此則裁七逐如此得人圓徑合問

最上流丸太源五右衛門正通門人

新發田家中

山本金平方剛

享和三癸亥年四月

上面是在日本新潟縣白山神社

日本寺院幾何指的是18和19世紀時不少人用文字把幾何問題寫在木板上奉獻給寺/神社的做法



這個網站有更多資訊：www.wasan.jp

上面是在日本新潟縣羽黑神社

Japanese
Temple Geometry
Problems

San Gaku

算 額

Winnipeg, Canada, 1989

SACRED MATHEMATICS

Japanese Temple Geometry



Fukagawa Hidetoshi
Tony Rothman

With a foreword by Freeman Dyson

我在這兩本名著中
都找不到這一道題

我可能漏讀了些什麼，
若您找到了，請告知。
多謝！



J. MARSHALL UNGER

這是由J. Marshall Unger教授翻譯
(成英文) 的另一本有趣的相關著作

原日文版是會田安明 (1747 - 1814)
在1793年出版的《最上流算法貫通術》

謝謝收看， 3Q