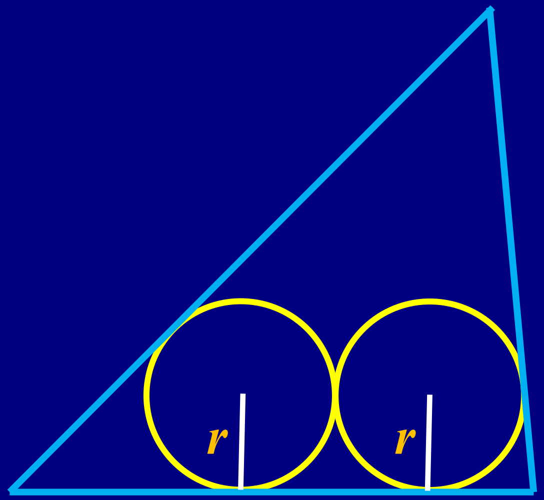
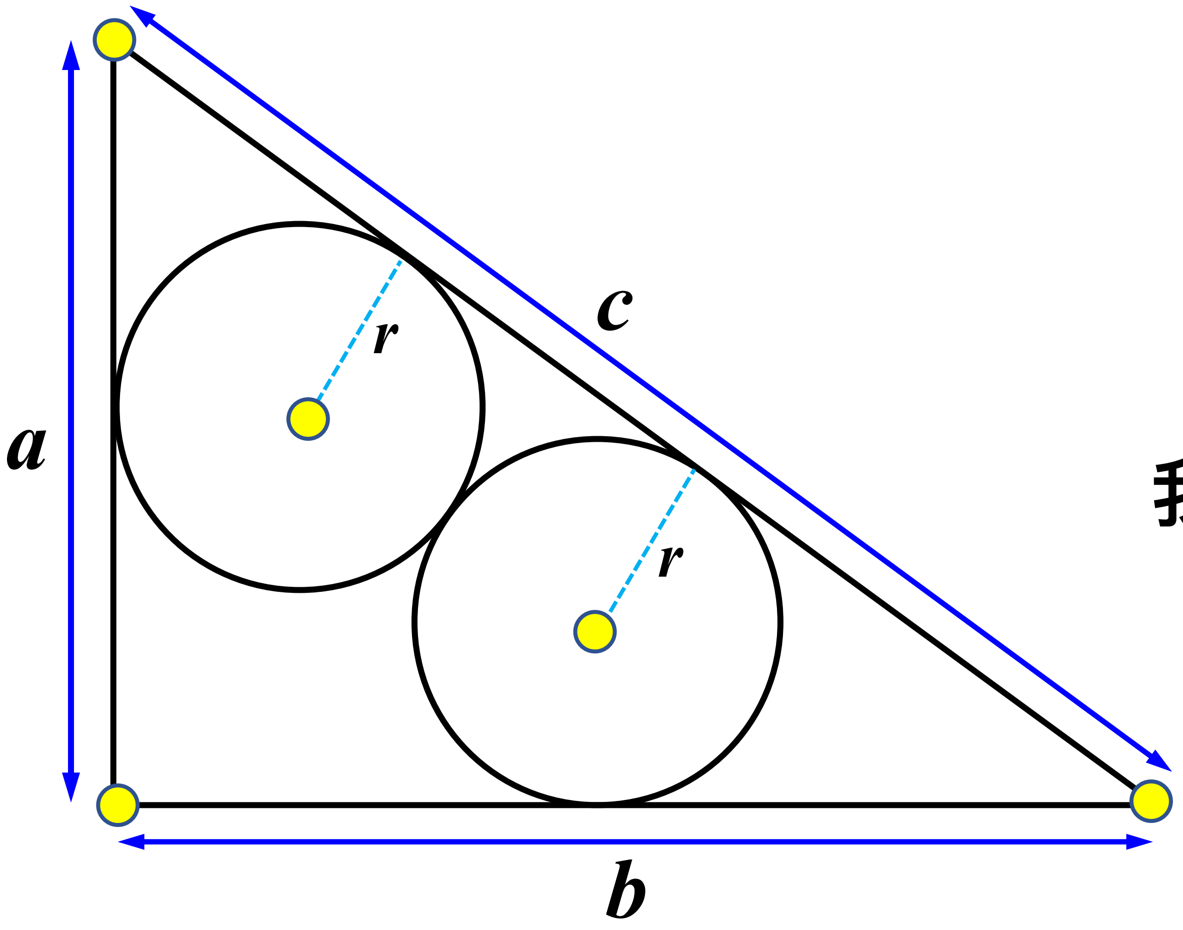
一個簡單的幾何問題

（續第一講）： 變化和推廣



Feeding your children without education,
it is the fault of the father;
Teaching your students without rigor,
it is the laziness of the teacher.

Yinglin Wang (王應麟) 《三字經》

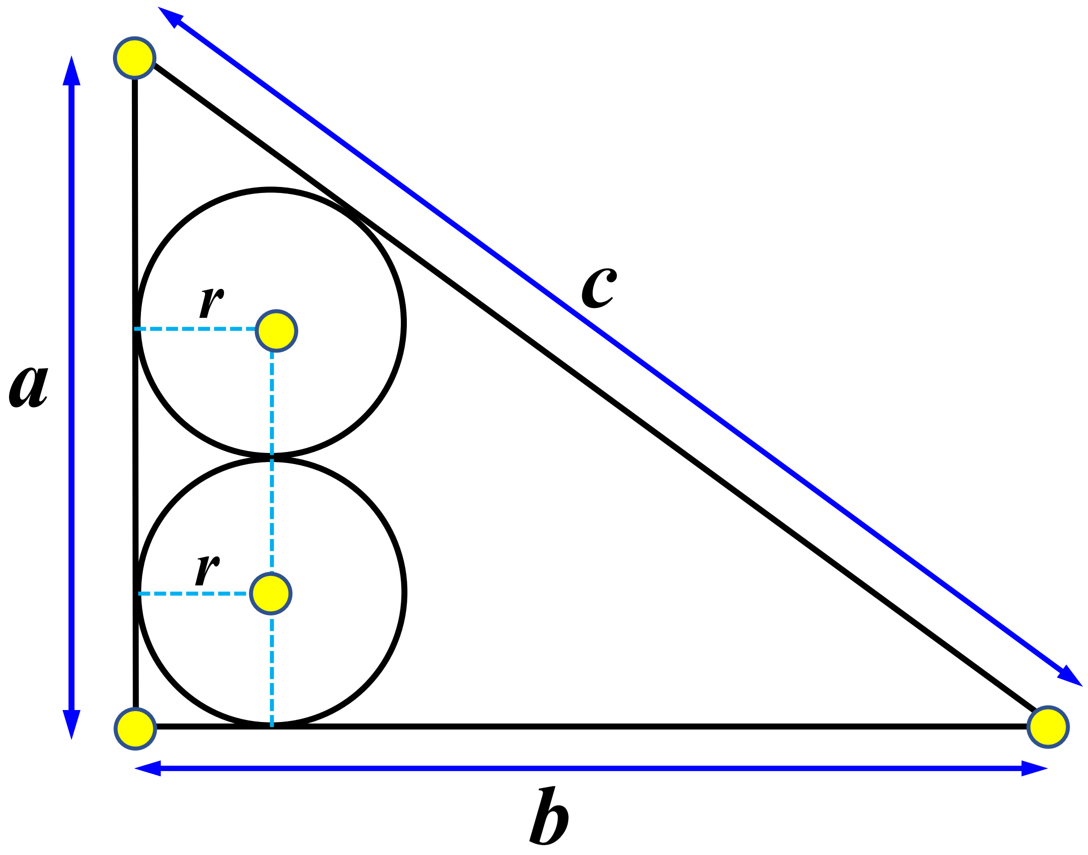


在第一講中我們解了如下的問題:

已知兩個互切且半徑相同的圓,
它們和直角三角形斜邊相切、而且
每一個圓都和一直角邊相切,
請問圓半徑r 為何?

我們算出的半徑r為:

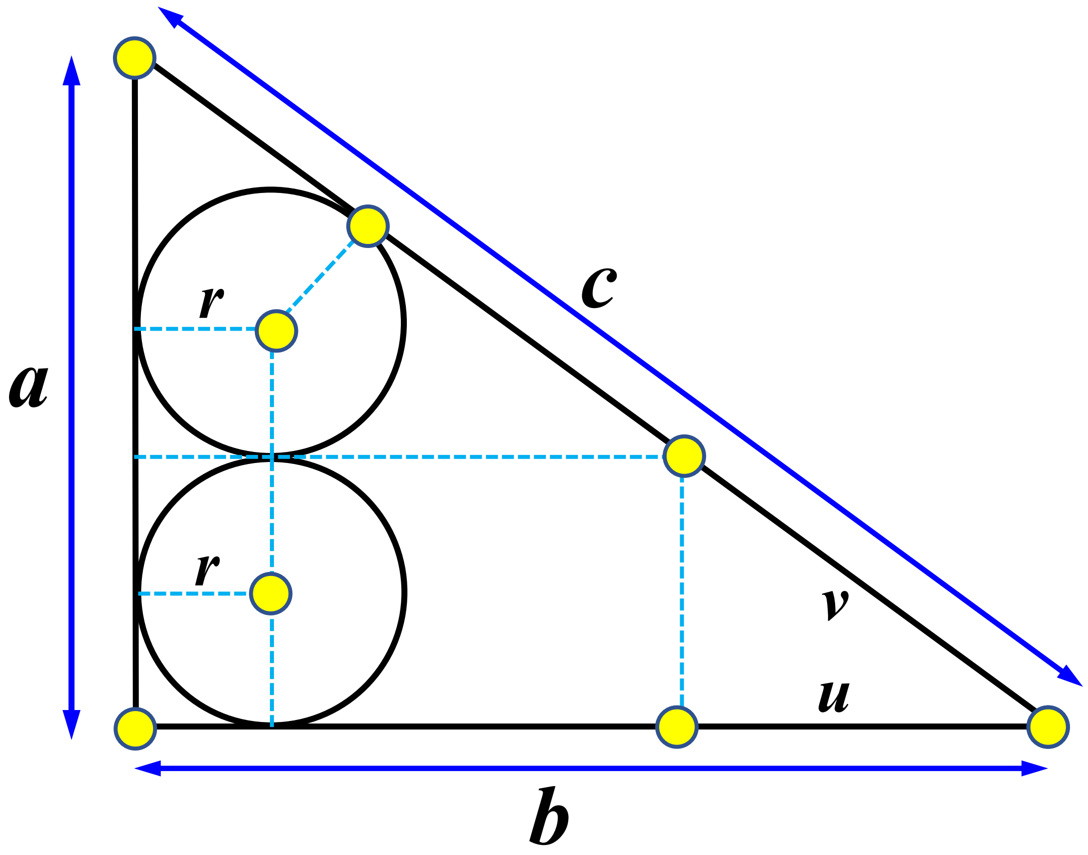
$$
\begin{aligned}
r &= \frac{1}{2}\left[c - \frac{c^2}{a+b}\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{c}{a+b}(a+b-c) \\
&= \frac{c}{2}\frac{a+b-c}{a+b}
\end{aligned}
$$



若兩圓換成和一直角邊（而非斜邊）相切呢?

這兩個圓的存在和唯一的證明和第一講的方式相同.

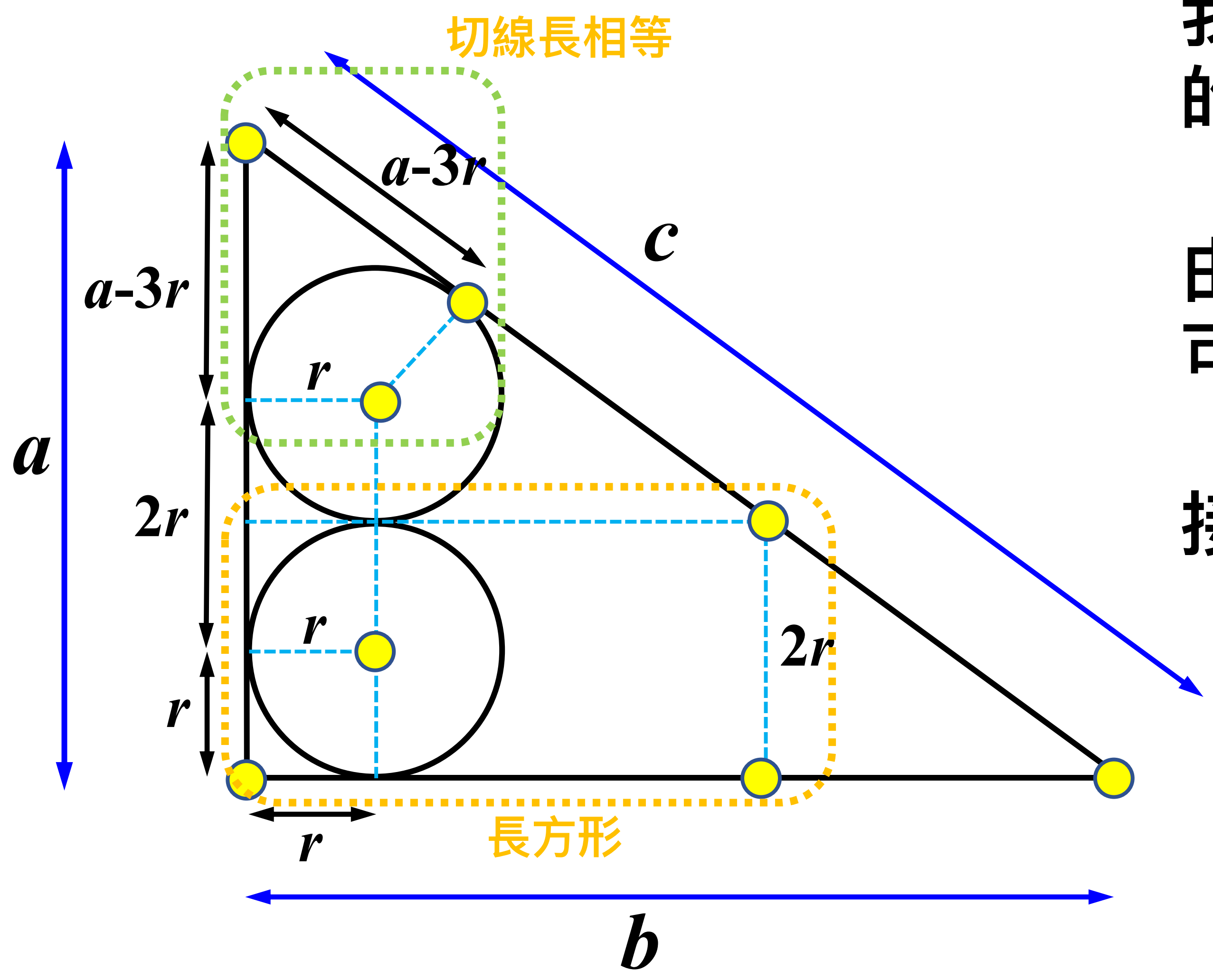
那麼，圓半徑*r* 是多少?



作以下的輔助線:

- 從各圓心向各邊作垂線
- 在兩圓切點作兩圓的公切線、和斜邊交於一點
- 從該點向一直角邊作垂線

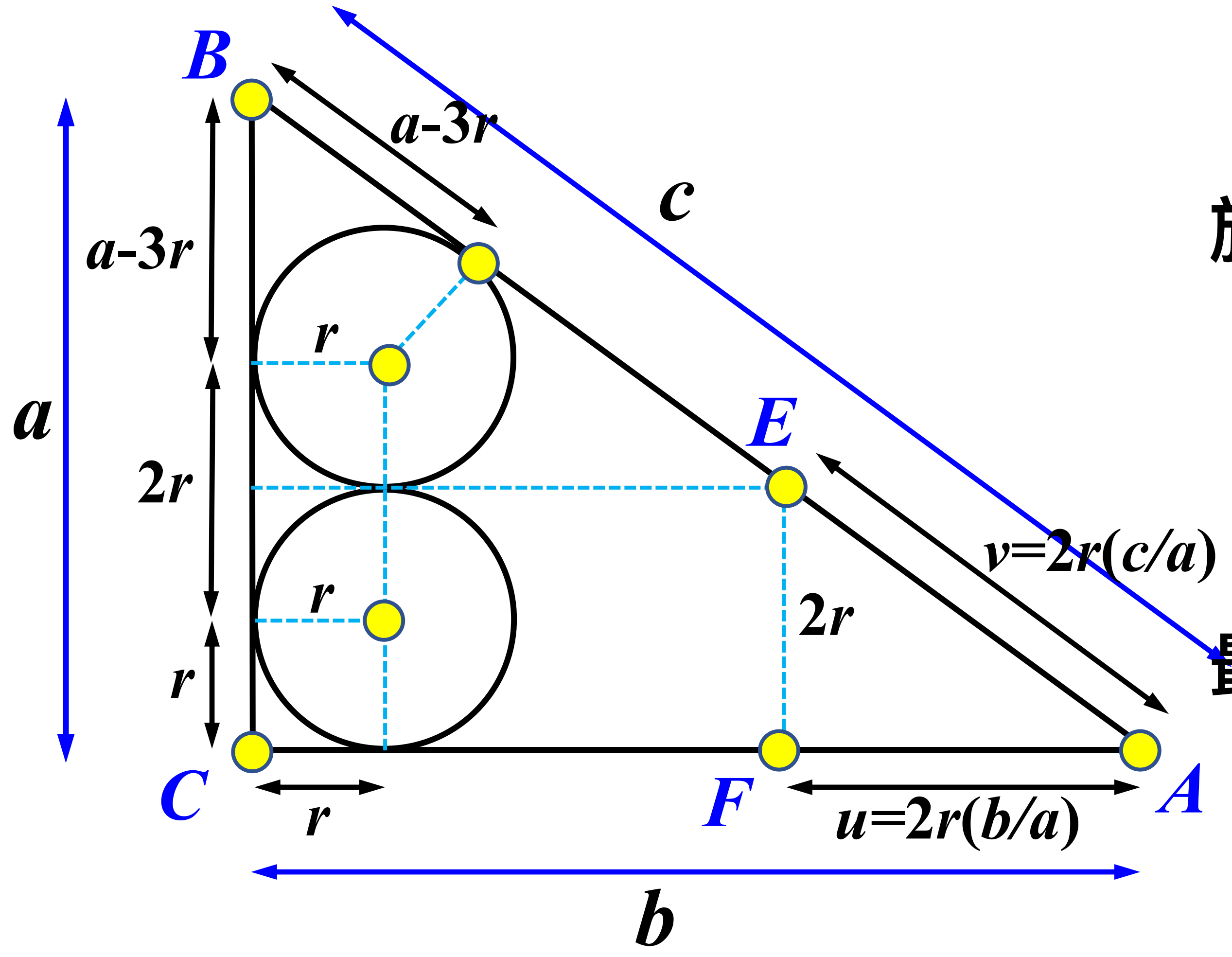
請看左圖



我們可以很容易找出和 r 有直接關係的線段 r, $2r$ 和 a-3r.

由於切線長相等，a-3r 這段長度可以抄到斜邊

接下來，我們得找出其它線段的長度



此地有兩個相似三角形:

$$\Delta ABC \sim \Delta AEF$$

於是有下面關係:

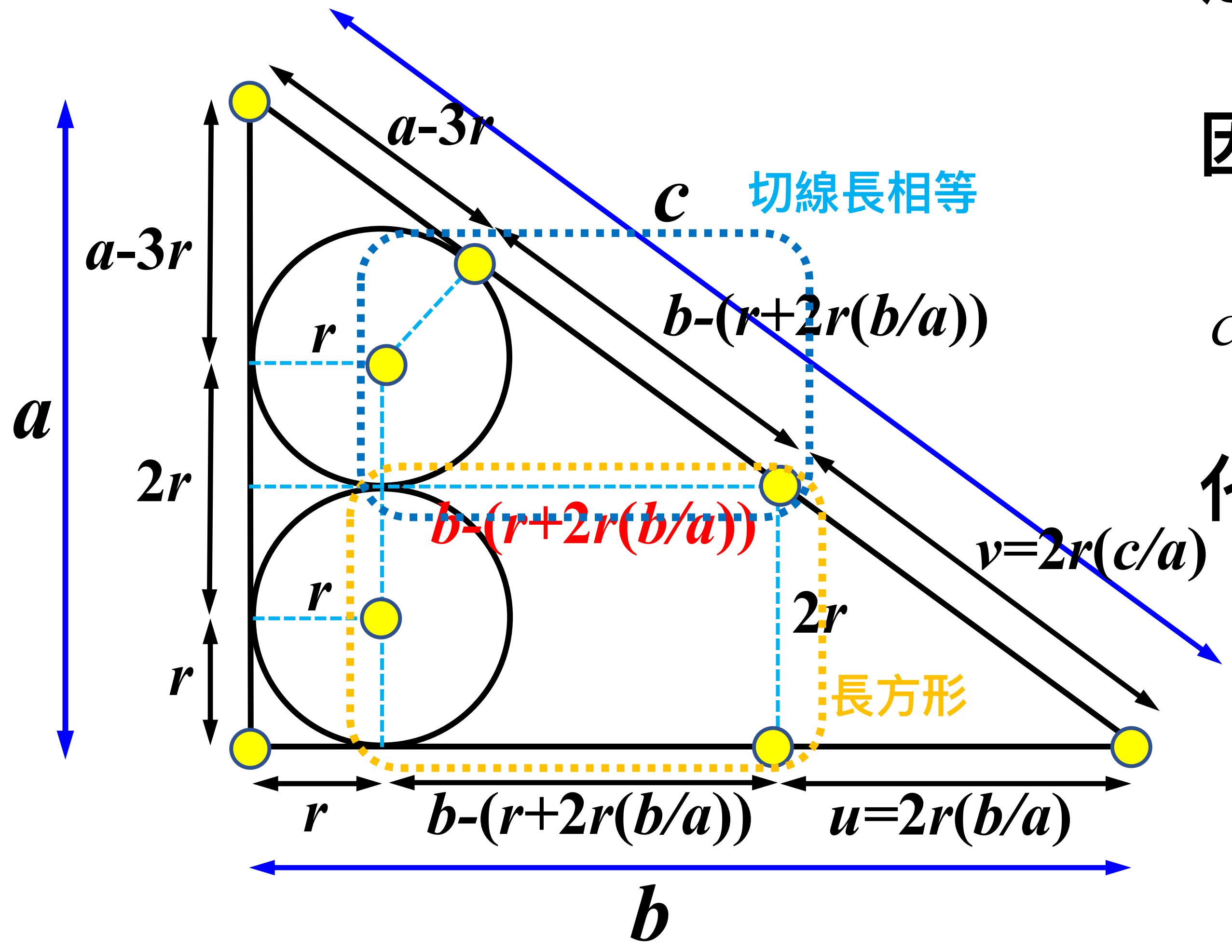
$$\frac{u}{2r} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{v}{2r} = \frac{c}{a}$$

最後得到

$$u = 2r\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$v = 2r\left(\frac{c}{a}\right)$$



這樣，其它線段長度就都有了.

因此斜邊長c就是:

$$c=(a-3r)+\left[b-\left(r+2r\left(\frac{b}{a}\right)\right)\right]+2r\left(\frac{c}{a}\right)$$

化簡之後得到:

$$c=(a+b)-2r\left(2+\frac{b-c}{a}\right)$$

把c 的式子改寫

$$c=(a+b)-2r\left(2+\frac{b-c}{a}\right)$$

這個型式很重要

$$=(a+b)-2r\frac{\boxed{a+(a+b-c)}}{a}$$

解出r

$$r=\frac{a}{2}\frac{a+b-c}{a+(a+b-c)}$$

它是和a 邊相切的圓半徑r

與a邊（或b 邊）相切的兩個圓的半徑為r_a（或r_b）

$$r_a=\frac{a}{2}\frac{a+b-c}{a+(a+b-c)}$$

$$r_b=\frac{b}{2}\frac{a+b-c}{b+(a+b-c)}$$

上面計算中把a 換成b 就是r_b

把和c相切的圓半徑r_c改寫

$$r_c=\frac{c}{2}\frac{a+b-c}{a+b}$$

$$=\frac{c}{2}\frac{a+b-c}{c+(a+b-c)}$$

加一個c 、減一個c

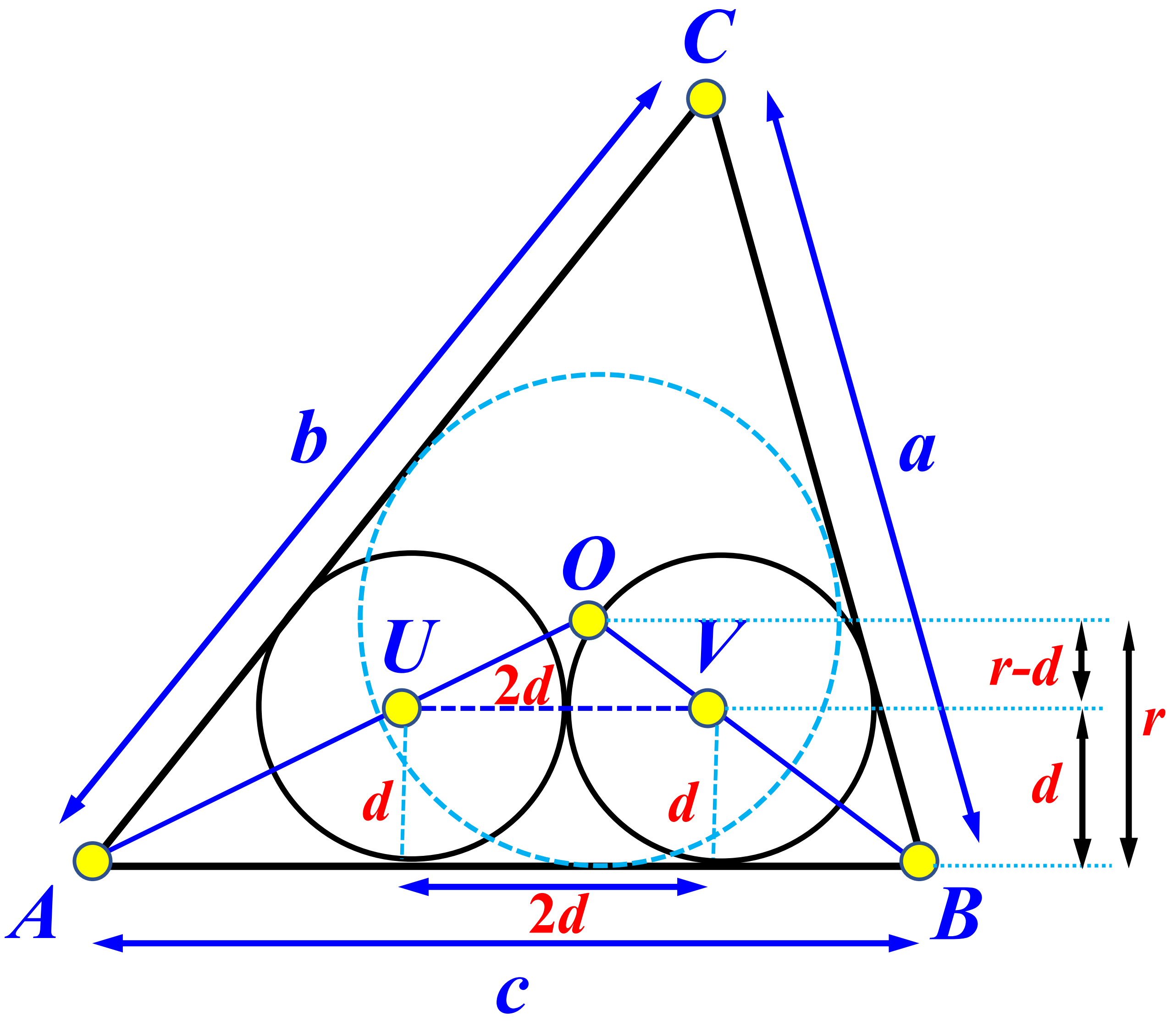
$$r_a=\frac{a}{2}\frac{a+b-c}{a+(a+b-c)}$$

$$r_b=\frac{b}{2}\frac{a+b-c}{b+(a+b-c)}$$

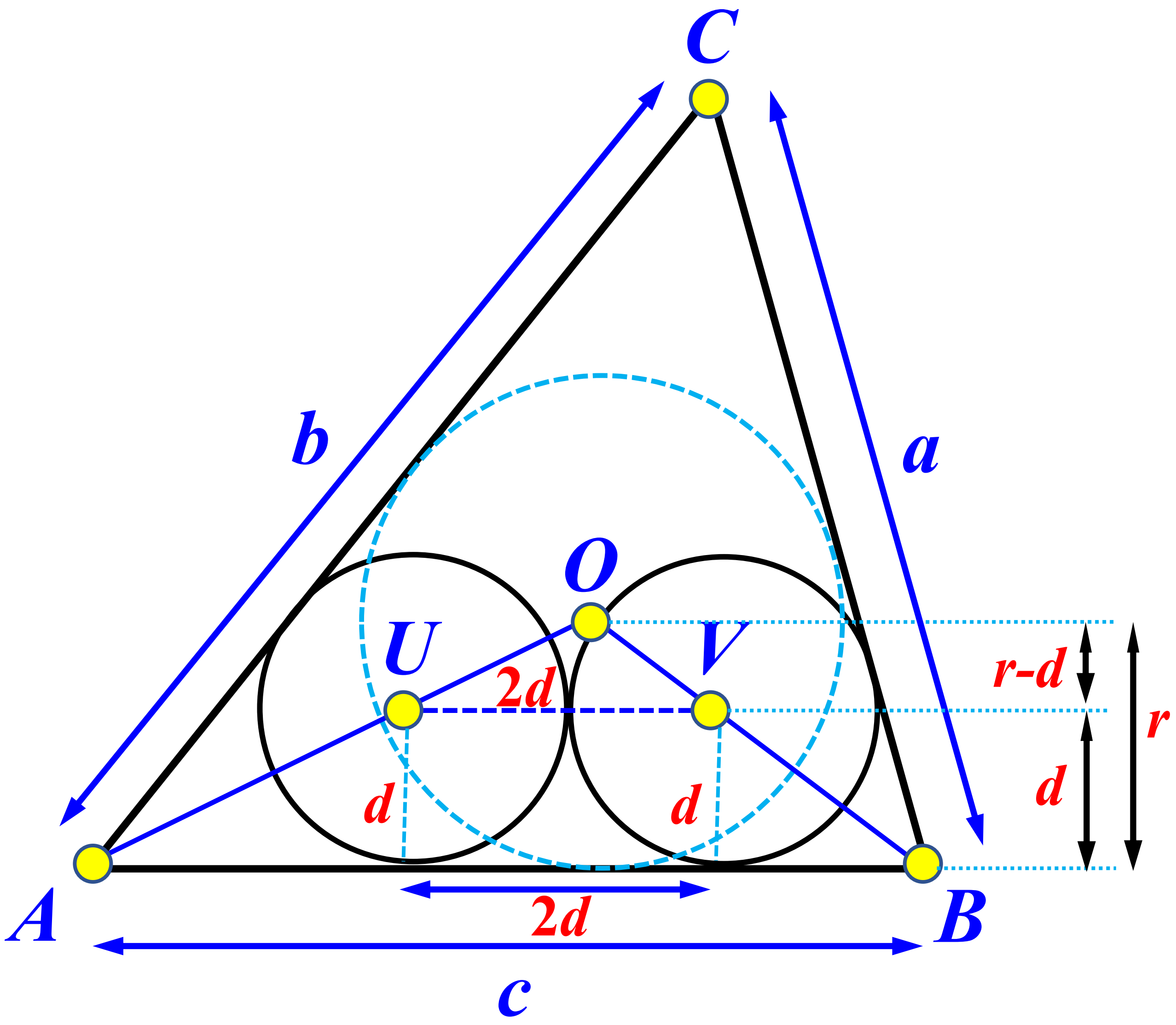
$$r_c=\frac{c}{2}\frac{a+b-c}{c+(a+b-c)}$$

- 所有式中都有 $a+b-c$
- r_a, r_b和r_c 是和a, b 和c相切的半徑長
- 因此，這個型式相當對稱

任意三角形呢?



- 考慮一個任意三角形ΔABC，它的內切圓半徑為 r 圓心為 O .
- 令兩個等半徑圓的半徑為 d 、中心為 U 和 V.
- 兩圓心之間的距離為$2d$.
- 三角形ΔOAB和ΔOUV 在頂點O處的高分別是 r 和 r-d.



- 因為ΔOAB和ΔOUV相似，我們得到：

$$\frac{2d}{c}=\frac{r-d}{r}$$

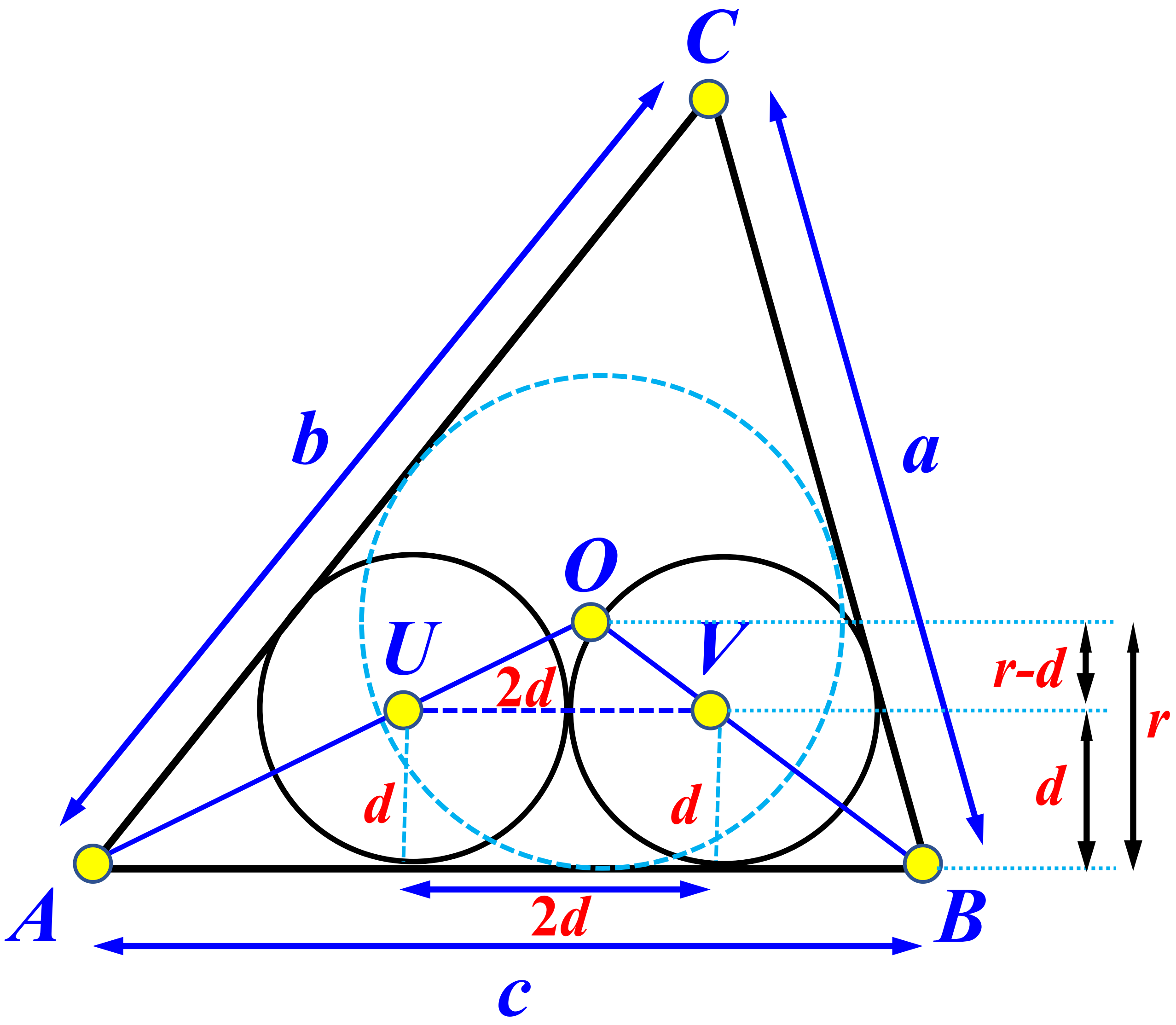
- 解出d之後為：

$$2dr=cr-cd$$

$$2dr+cd=cr$$

$$d(2r+c)=cr$$

$$\boxed{d=\frac{cr}{2r+c}}$$

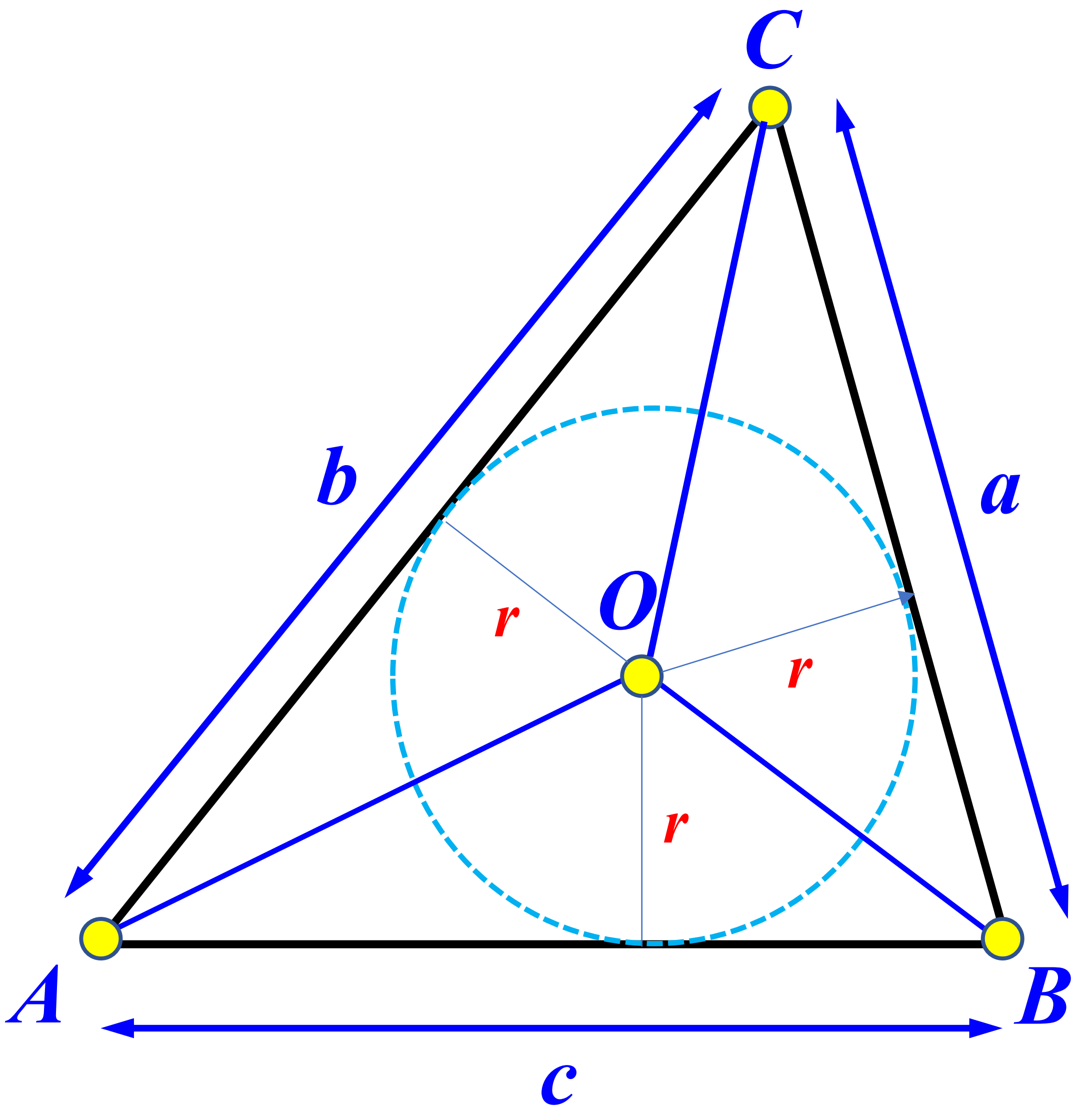


❑ **哇！那麼簡單！**

❑ 不過，您可能不太願意接受用內切圓半徑 r 來算 d 的手法.

❑ **沒問題！** 很容易就可以把內切圓半徑 r 換成三個邊長 a, b 和 c.

$$d = \frac{cr}{2r + c}$$

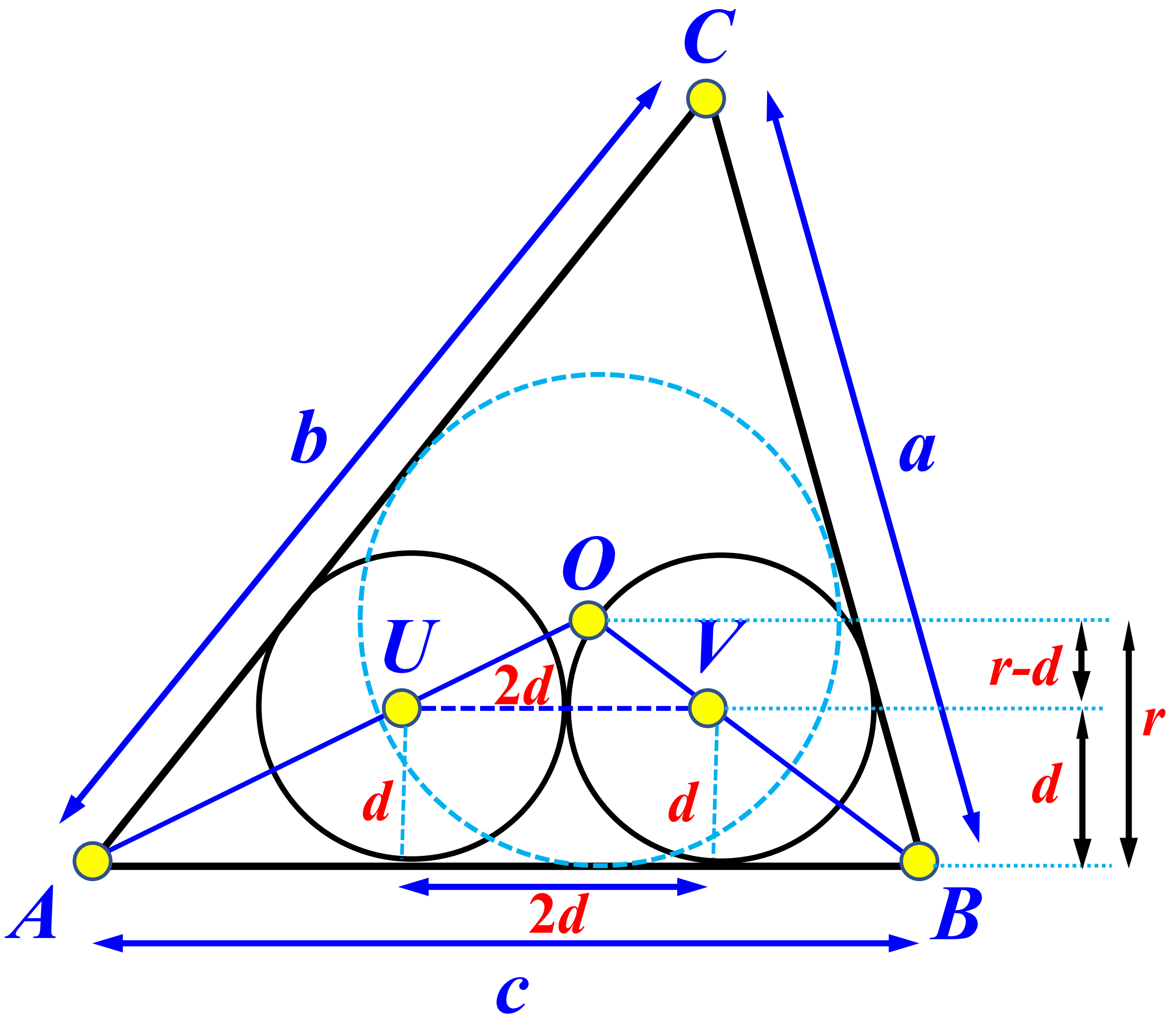


- ΔABC 可以分解成三個小三角形 ΔOAC, ΔOCB 和 ΔOBA.
- 所以得到：

$$\begin{aligned}\text{Area}(\Delta ABC) &= \text{Area}(\Delta OAC) + \text{Area}(\Delta OCB) + \text{Area}(\Delta OBA)\\ &= \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rc\\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)r\end{aligned}$$

- 令 $s = (a+b+c)/2$.
- 我們有 $\text{Area}(\Delta ABC) = s \times r$.
- 因此，r 就是：

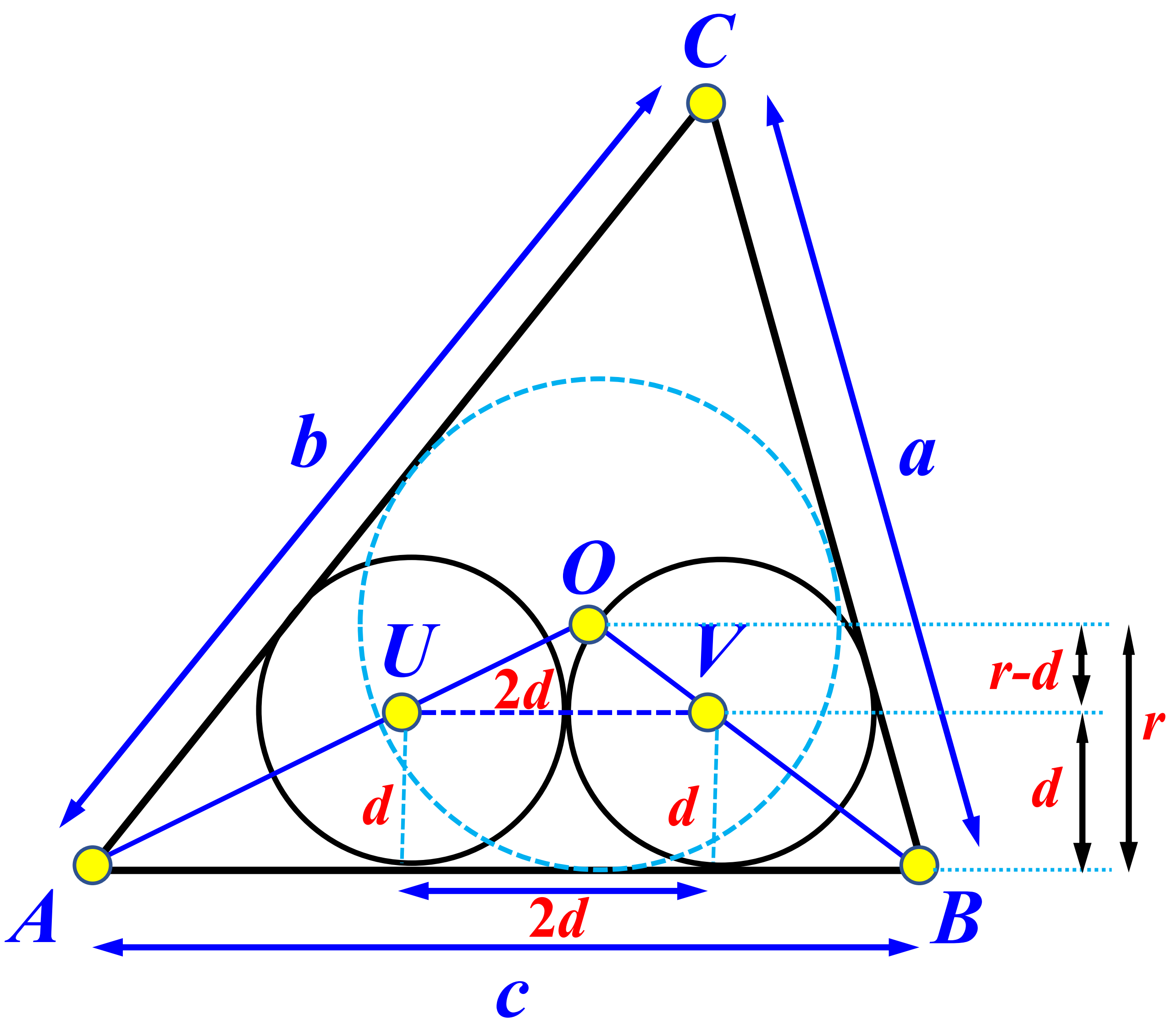
$$r = \frac{\text{Area}(\Delta ABC)}{s}$$



- 最後的結果是：

$$d = \frac{cr}{2r + c} = \frac{c\dfrac{\text{Area}(\Delta ABC)}{s}}{2\dfrac{\text{Area}(\Delta ABC)}{s} + c} = \frac{c \times \text{Area}(\Delta ABC)}{2 \times \text{Area}(\Delta ABC) + c \times s}$$

這是唯二用到 c 的地方

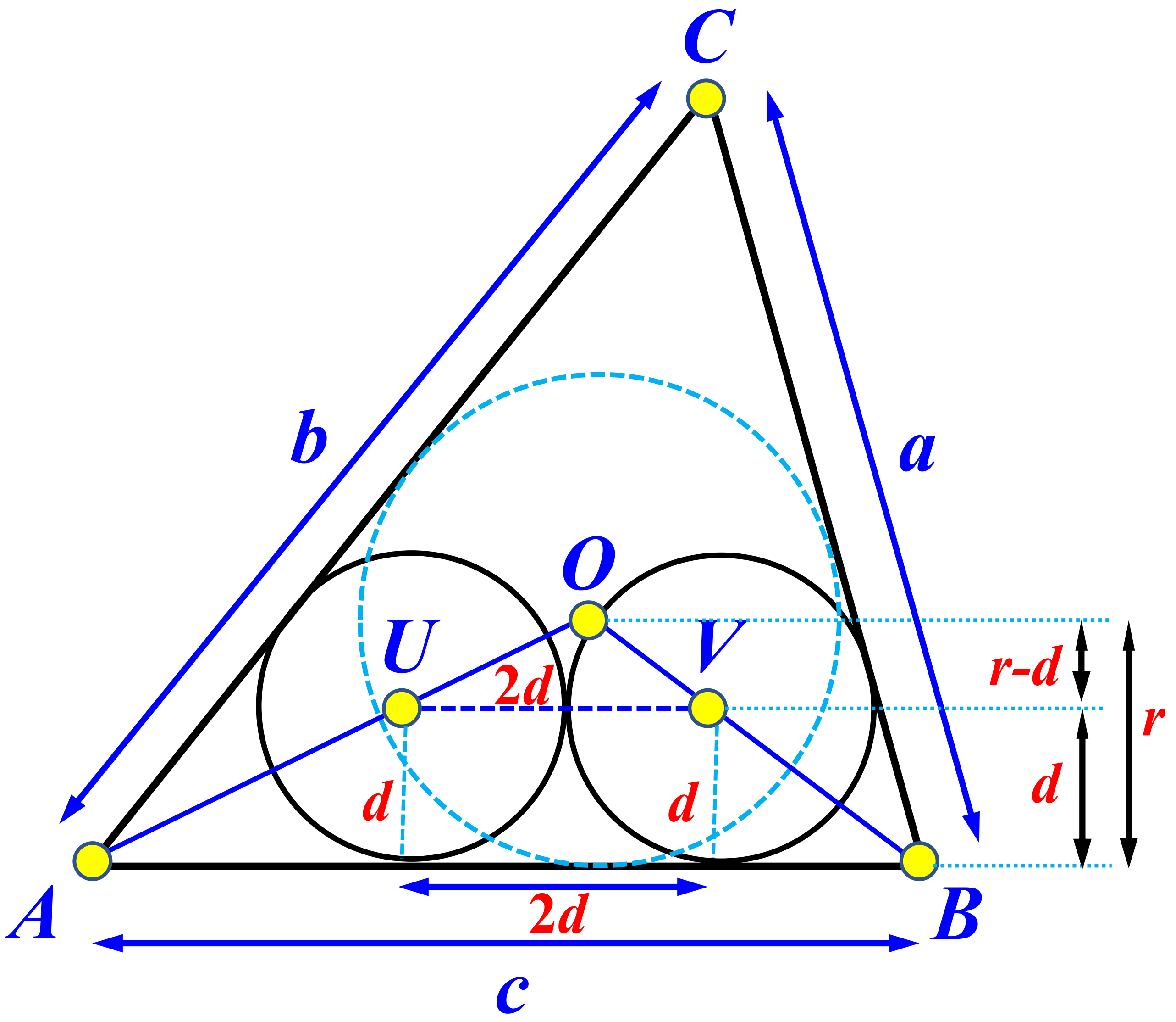


- 我們用 **Δ**和 ***s*** 表示**Area(Δ*ABC*)** 和 ***s*=(*a*+*b*+*c*)/2**.
- 又用 d_a, d_b 和 d_c表示和邊*a*, *b* 和 *c* 相切的圓半徑.
- 因此，我們期望的結果如下：

$$d_a = \frac{a \times \Delta}{2 \times \Delta + a \times s}$$

$$d_b = \frac{b \times \Delta}{2 \times \Delta + b \times s}$$

$$d_c = \frac{c \times \Delta}{2 \times \Delta + c \times s}$$



- **Heron的三角形面積公式為**

  $\text{Area}(\Delta ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

  代入 d_a, d_b 和 d_c 得到和a, b和 c 相切的圓半徑.

- **若 ΔABC 為直角三角形、而且c為斜邊時的結果為何?**

- 在進入正題前，複習一個小技巧：

$$(a+b+c)(a+b-c)$$
$$=[(a+b)+c]\times[(a+b)-c]$$
$$=(a+b)^2-c^2$$
$$c^2=a^2+b^2$$
$$=(a+b)^2-(a^2+b^2)$$
$$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2+b^2)$$
$$=2ab$$

- 因此得到：

$$d_a=\frac{a\times\Delta}{2\times\Delta+a\times s}$$
$$=\frac{a\left(\frac{1}{2}ab\right)}{2\left(\frac{1}{2}ab\right)+a\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}$$
$$=\frac{a\left(\frac{1}{2}ab\right)}{2\left(\frac{1}{2}ab\right)+\frac{a}{2}\boxed{\frac{2ab}{a+b-c}}}$$
$$=\frac{a\left(\frac{1}{2}ab\right)}{2\left(\frac{1}{2}ab\right)+\left(\frac{1}{2}ab\right)\frac{2a}{a+b-c}}$$
$$=\frac{a}{2+\frac{2a}{a+b-c}}=\frac{a}{2}\times\frac{1}{1+\frac{a}{a+b-c}}$$

老面孔了！
$$\boxed{=\frac{a}{2}\times\frac{a+b-c}{a+(a+b-c)}}$$

題外話

- 若 $c^2=a^2+b^2$，我們如何從 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 得到 $\frac{1}{2}ab$?
- 把 $s=(a+b+c)/2$ 代入Heron公式:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\times\frac{b+c-a}{2}\times\frac{a+c-b}{2}\times\frac{a+b-c}{2}}$$

這一項是 $2ab$

$$=\frac{1}{2^2}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}=\frac{1}{2^2}\sqrt{(2ab)^2}=\frac{1}{2}(ab)$$

這一項也是 $2ab$

- 考慮剩下的兩項:

$$(b+c-a)(a+c-b)=\left[c-(a-b)\right]\times\left[c+(a-b)\right]$$

$$=c^2-(a-b)^2=(a^2+b^2)-(a-b)^2$$

$$=(a^2+b^2)-(a^2-2ab+b^2)=2ab$$

我們學到了什麼?

- 我們成功地導出這個問題的答案：已知兩個等半徑且互切的圓，若直角三角形某邊是此二圓的公切線、而且一個圓只和一邊相切，求圓的半徑。
- 我們也成功地導出了一致性而且相當對稱的型式。
- 這個問題很容易地被推廣到一般的三角形。
- 存在性和唯一性的證明和第一講的相同，此地從略。

謝謝收看，3Q