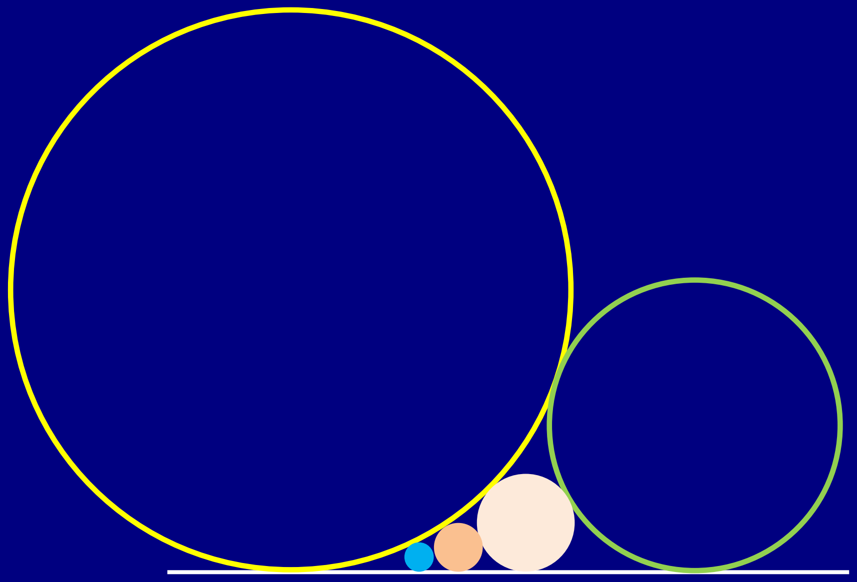
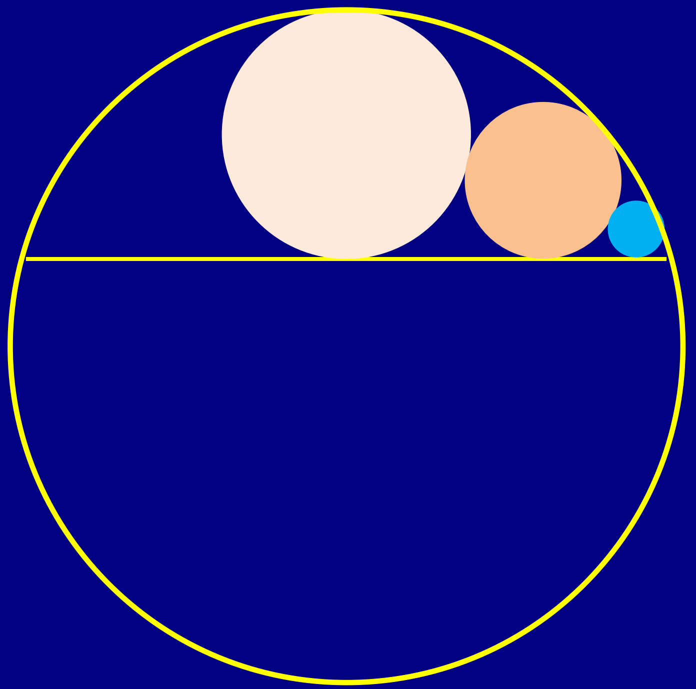
七道日本寺廟幾何問題





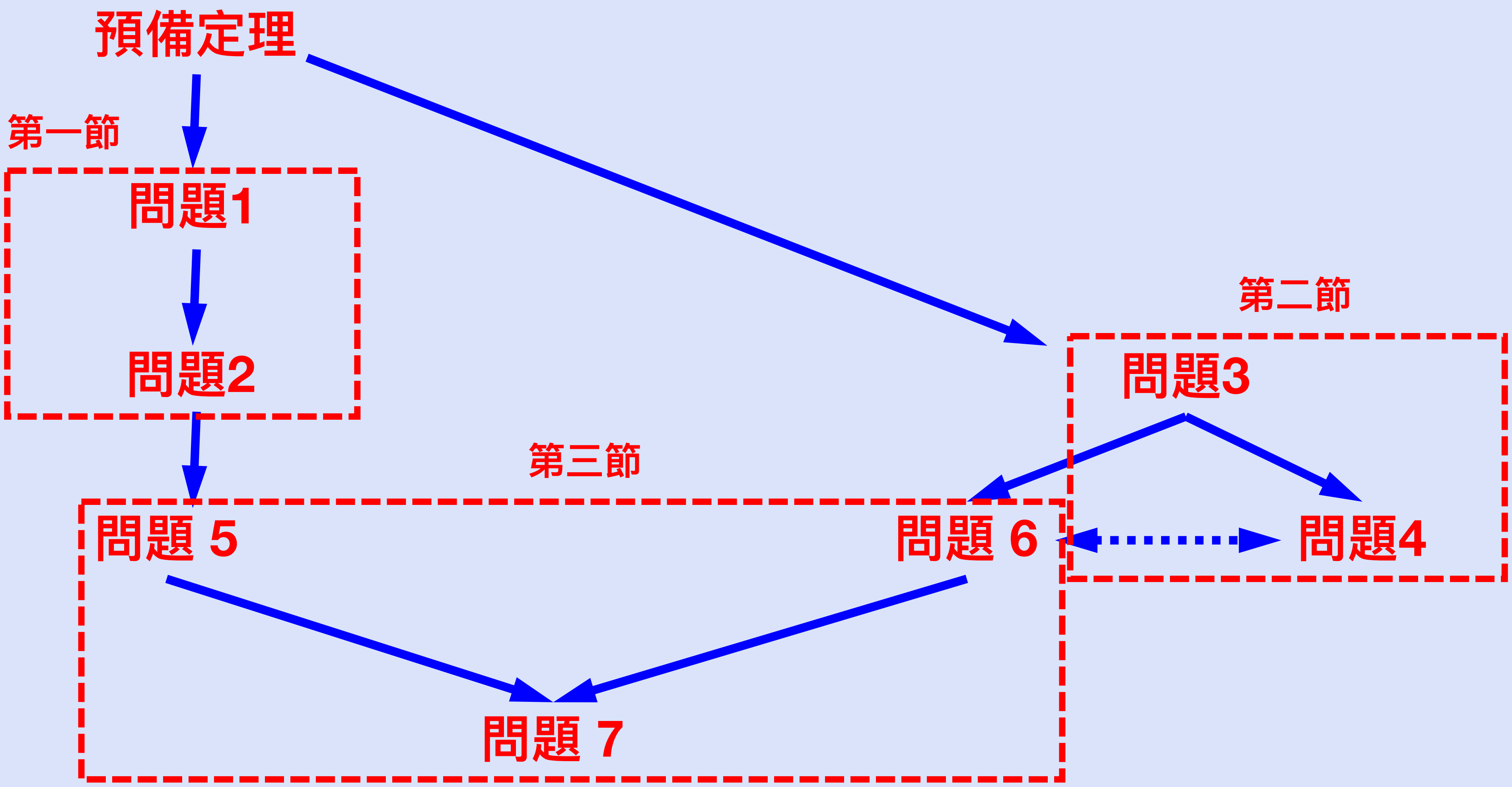
養不教，父之過
教不嚴，師之惰

王應麟 《三字經》

本集內容

1. 討論七道日本寺廟幾何的相關問題
2. 這些問題分成三節
3. 第一節介紹一個預備定理和問題1與2
4. 第二節討論問題3和4
5. 第三節、也是最長的一節，講解問題5、6和7
6. 除了問題5、6和7之外，其它問題都很簡單；問題5到7會用到拋物線的基礎知識

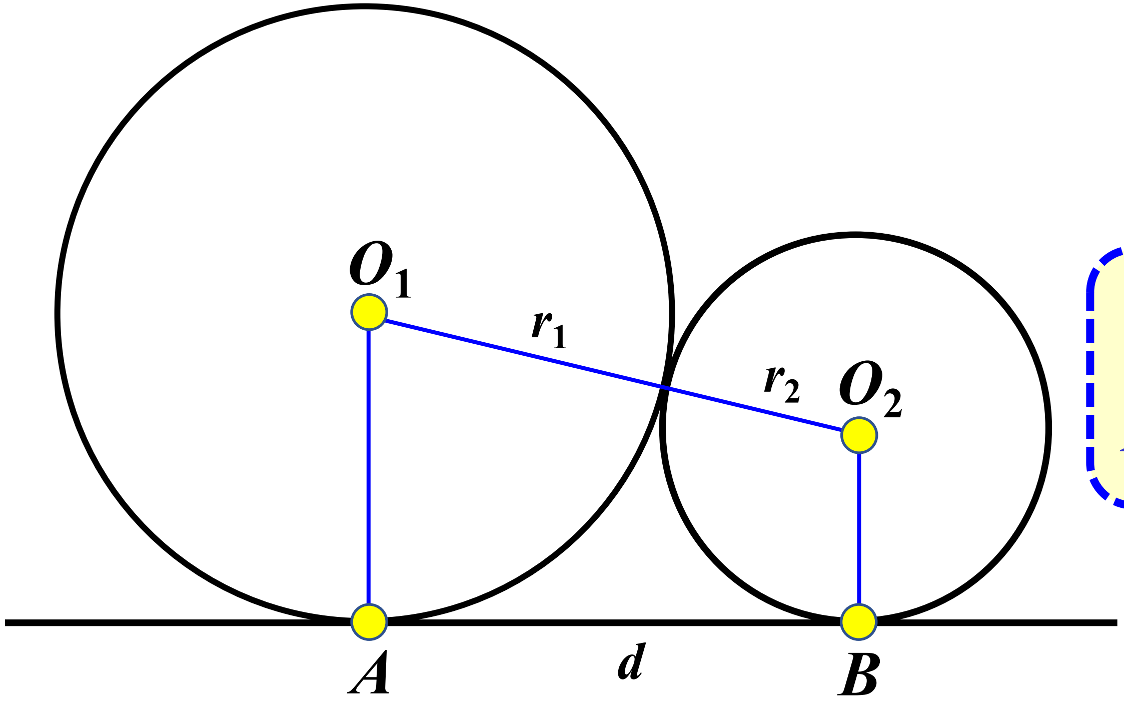
問題相關性



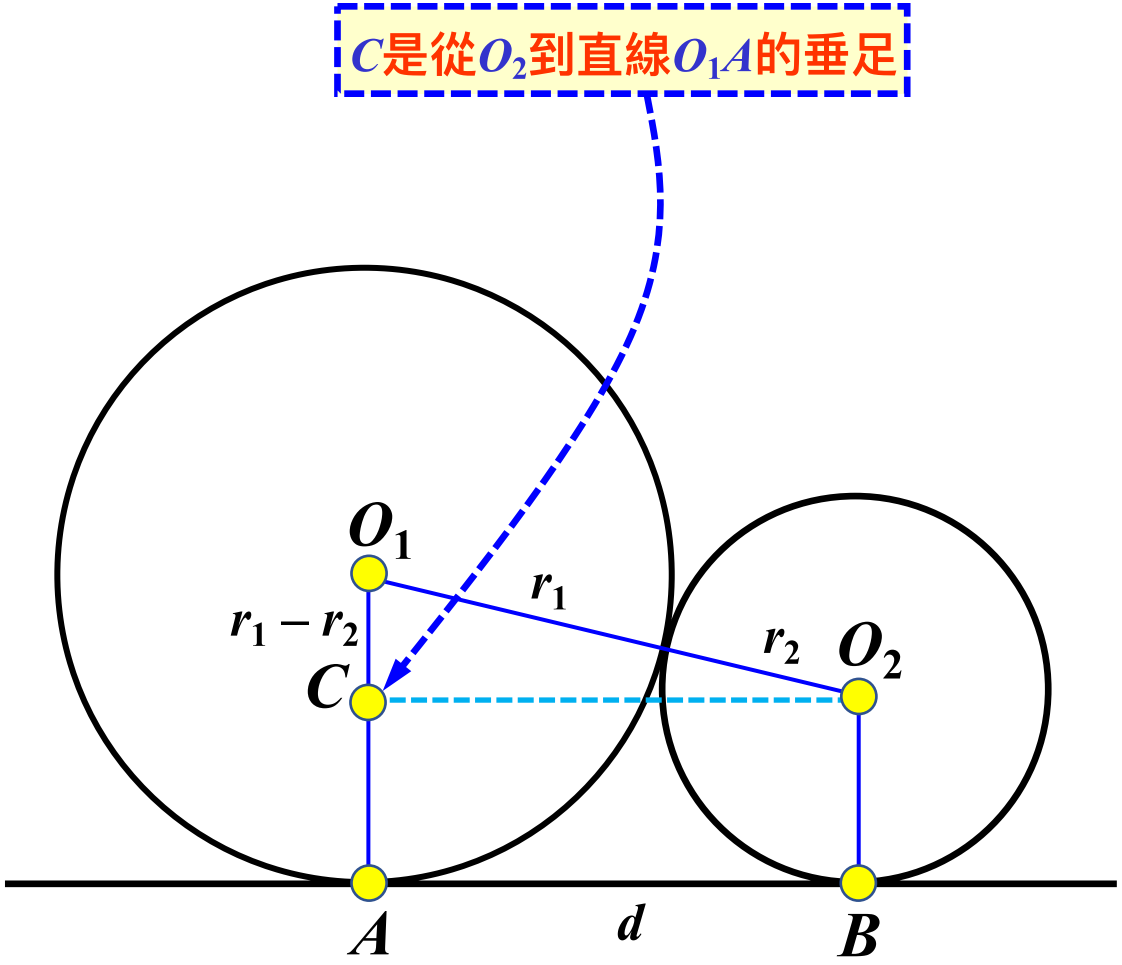
第一節
預備定理和問題1與2

預備定理

假設有兩個圓，圓心分別是O_1和O_2
而半徑分別是r_1和r_2，這兩個圓和直線
在A與B處相切



這兩個圓互切的充分必要條件是線段AB的長度為 $d = 2\sqrt{r_1 \cdot r_2}$

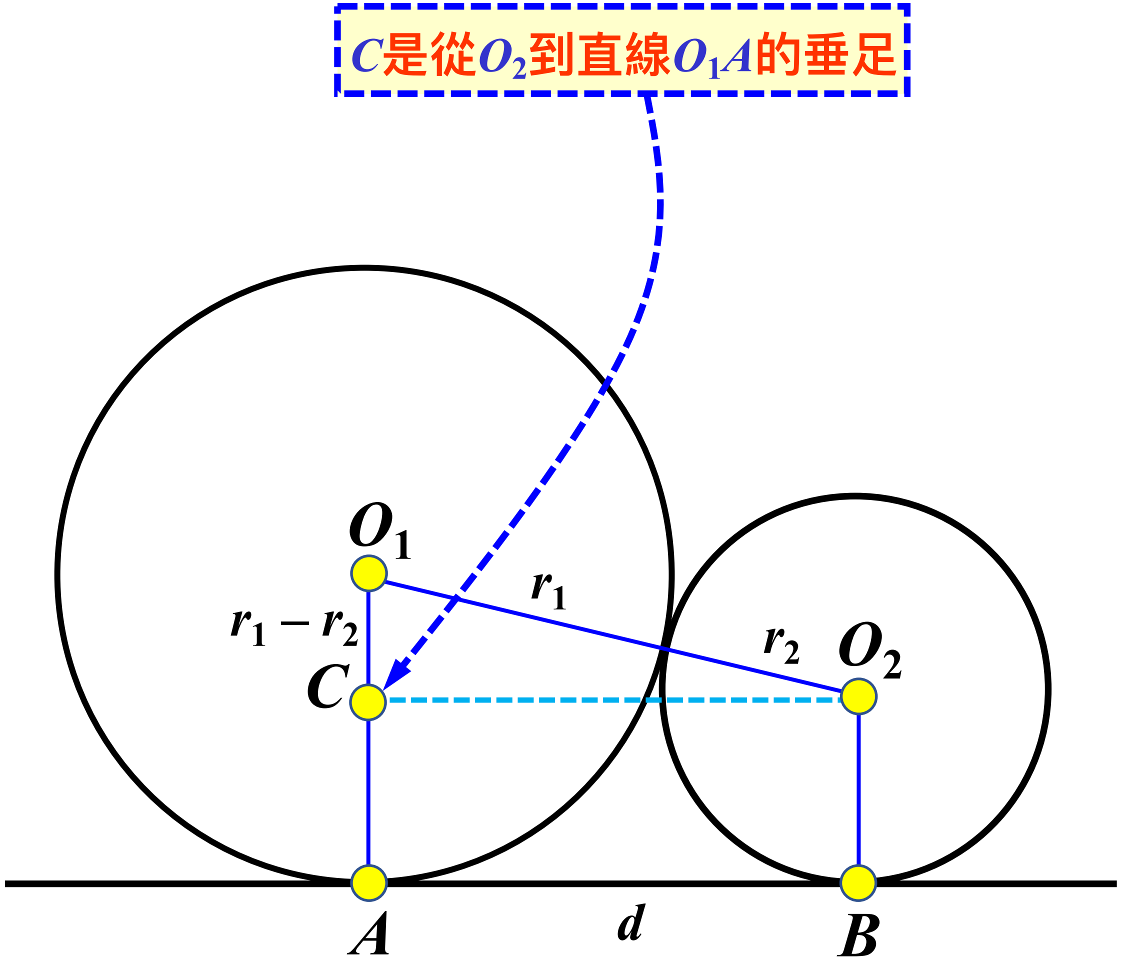


証明

$(\Longrightarrow)$ 假設這兩個圓互切，線段O_1O_2的長度為r_1+r_2

因為$\Delta\ O_1O_2C$為直角三角形，我們得到：

$$\begin{aligned} d^2 &= (r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2 \\ &= \big((r_1+r_2)-(r_1-r_2)\big)\times\big((r_1+r_2)+(r_1-r_2)\big) \\ &= (2r_2)(2r_1) \\ &= 4r_1r_2 \end{aligned}$$



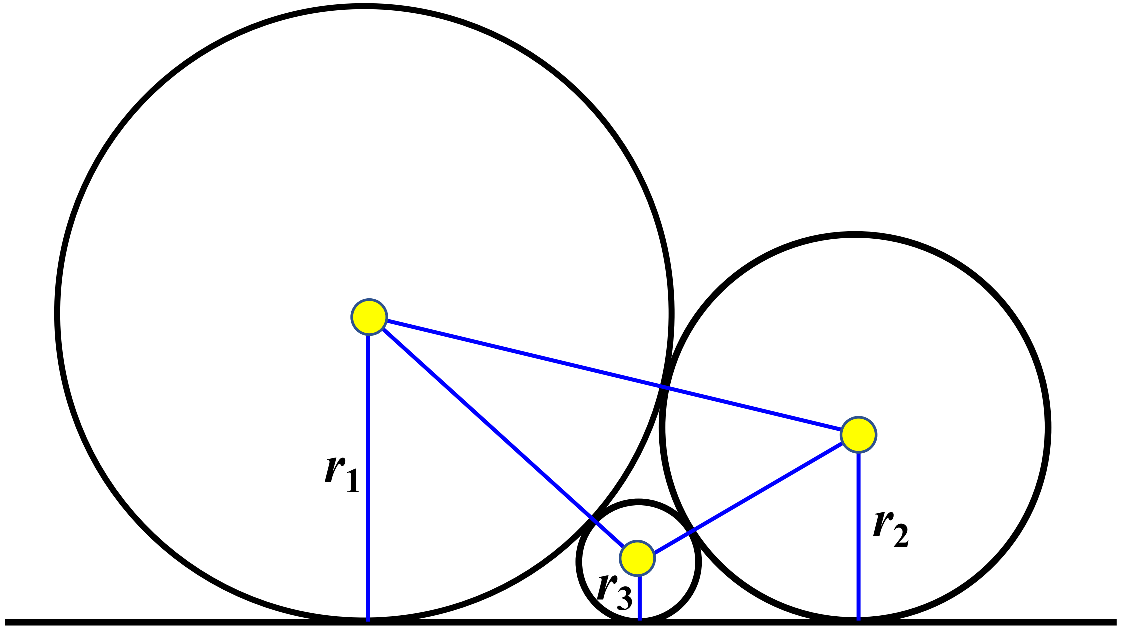
証明

($\Leftarrow$) 反之，若 $d = 2\sqrt{r_1 r_2}$ 我們有：

$$
\begin{aligned}
(O_1O_2)^2 &= (O_1C)^2 + d^2 \\
&= (r_1 - r_2)^2 + \left(2\sqrt{r_1 r_2}\right)^2 \\
&= \left(r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2\right) + 4r_1r_2 \\
&= r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 \\
&= (r_1 + r_2)^2
\end{aligned}
$$

所以兩圓互切

問題1

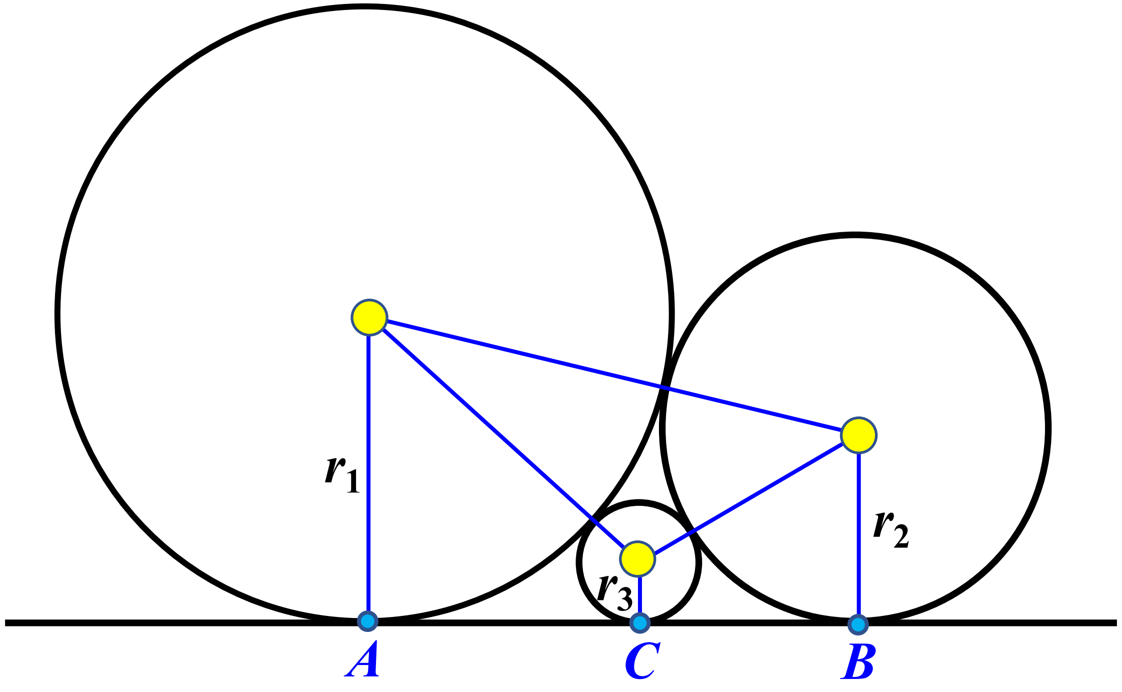


問題1

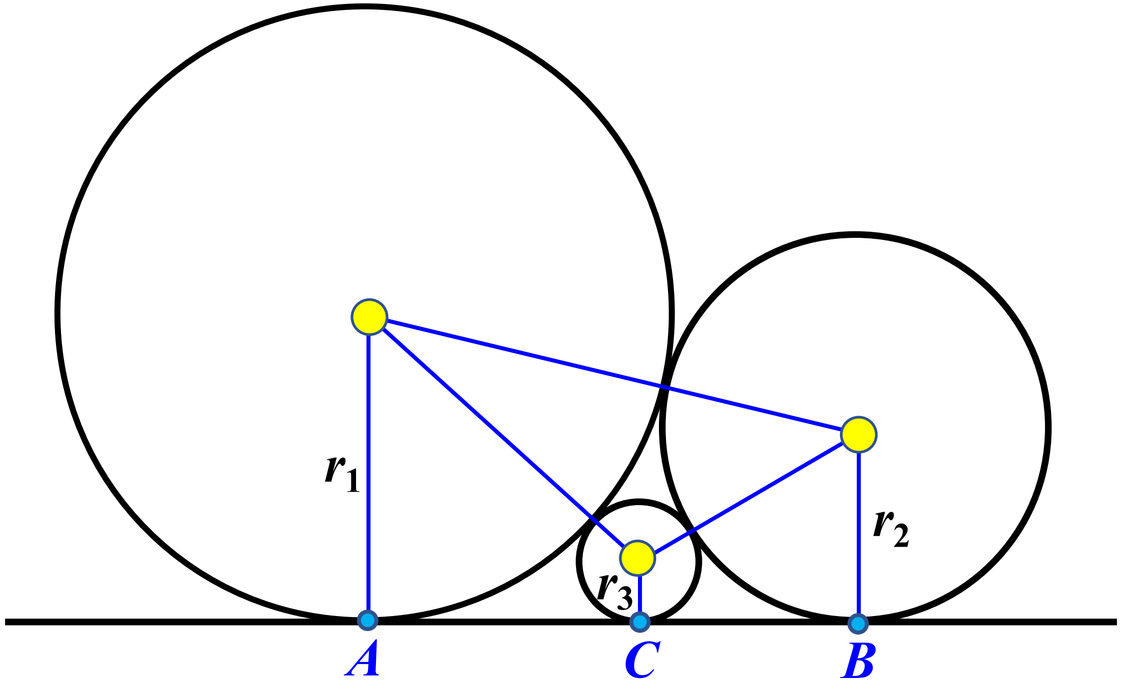
有三個圓半徑分別是r_1，r_2 和 r_3（見左圖），用r_1和r_2表示r_3。

解答

- 令三圓和直線的切點為 A, B和C（見左圖）
- 因為半徑為 r_1的圓和半徑為 r_3的圓相切，從**預備定理**得到 $\overline{AC}=2\sqrt{r_1r_3}$ 。
- 因為半徑為 r_2的圓和半徑為 r_3的圓相切，從**預備定理**得到 $\overline{BC}=2\sqrt{r_2r_3}$ 。
- 因為半徑為 r_1的圓和半徑為 r_2 的圓相切，從**預備定理**得到 $\overline{AB}=2\sqrt{r_1r_2}$ 。



解答



- 因為 $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$，我們得到

$$2\sqrt{r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_3}+2\sqrt{r_2r_3}$$

- 等式兩邊各除以 $2\sqrt{r_1r_2r_3}$ 得到期望的結果：

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

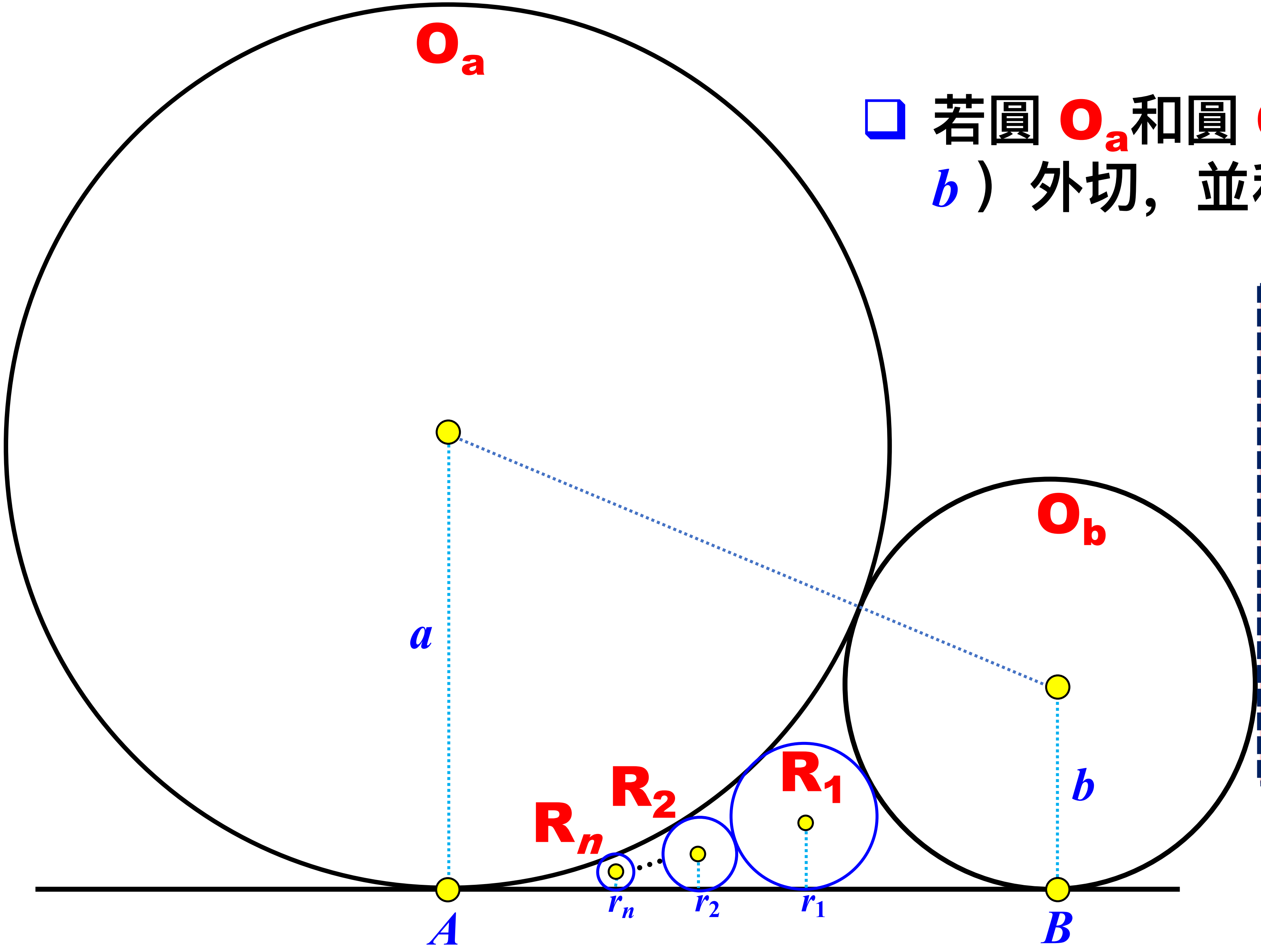
- 所以，三圓中半徑為 r_3的最小圓的半徑為：

$$\sqrt{r_3}=\frac{\sqrt{r_1r_2}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}}$$

$$r_3=\frac{r_1r_2}{\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}\right)^2}$$

問題2

問題1的延伸



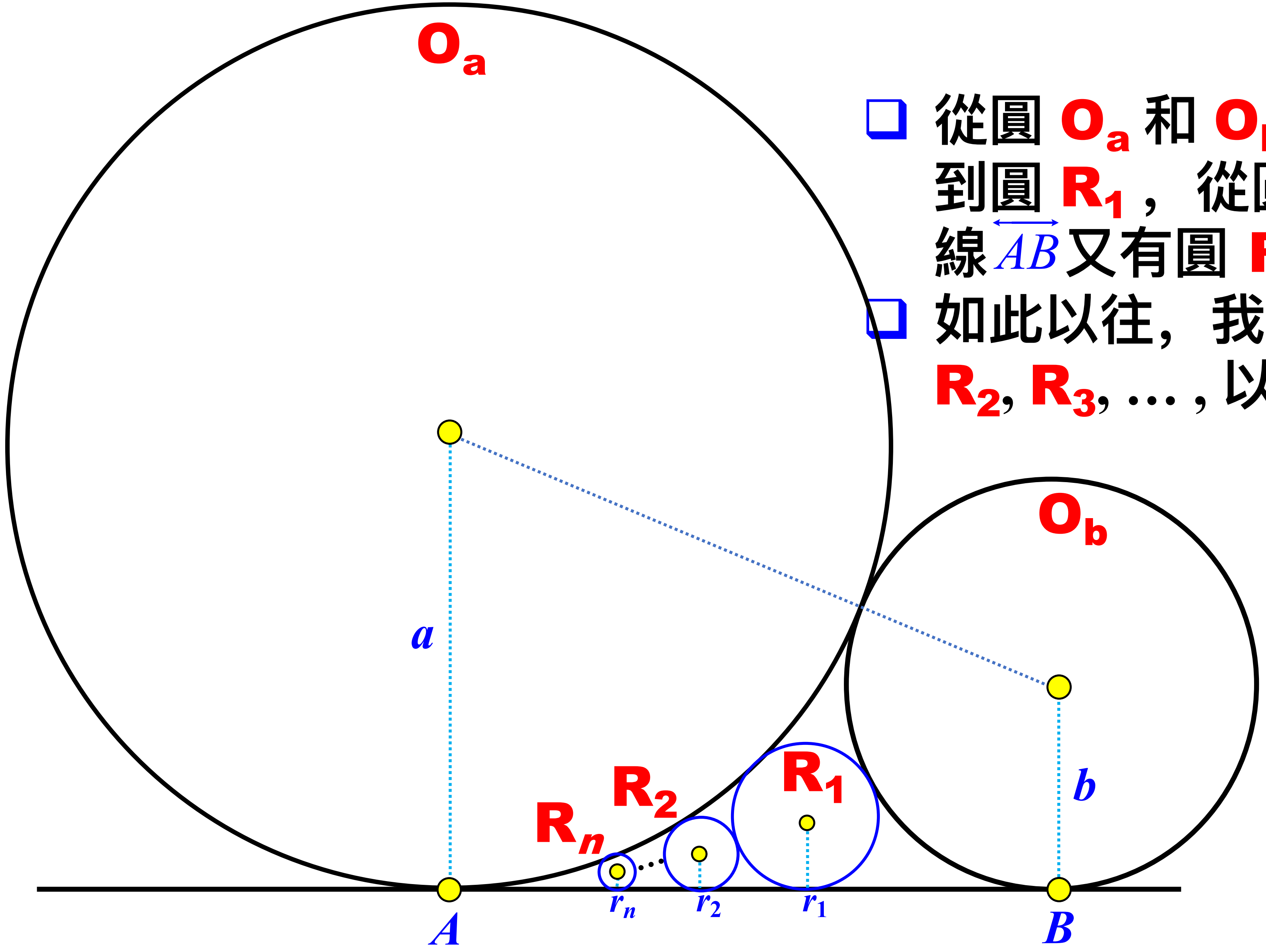
- 若圓 O_a 和圓 O_b（半徑分別為 a 和 b）外切，並和直線在 A 和 B 相切。

圓 O_a 和圓 O_b 以及公切線唯一地定出一個半徑為 r_1 的圓 R_1。

圓 O_a，R_1 和直線 AB 又唯一地定出另一個圓 R_2。

從 O_a，R_2 和 AB 又有圓 R_3。

其它的圓 $R_4, R_5, \ldots, R_n$ 等等可以用同樣方式作出來。



- 從圓 O_a 和 O_b 以及直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 我們得到圓 R_1，從圓 O_a 和 R_1 以及直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 又有圓 R_2。
- 如此以往，我們可以作出圓 R_1, R_2, R_3, … , 以及圓 R_n等等。

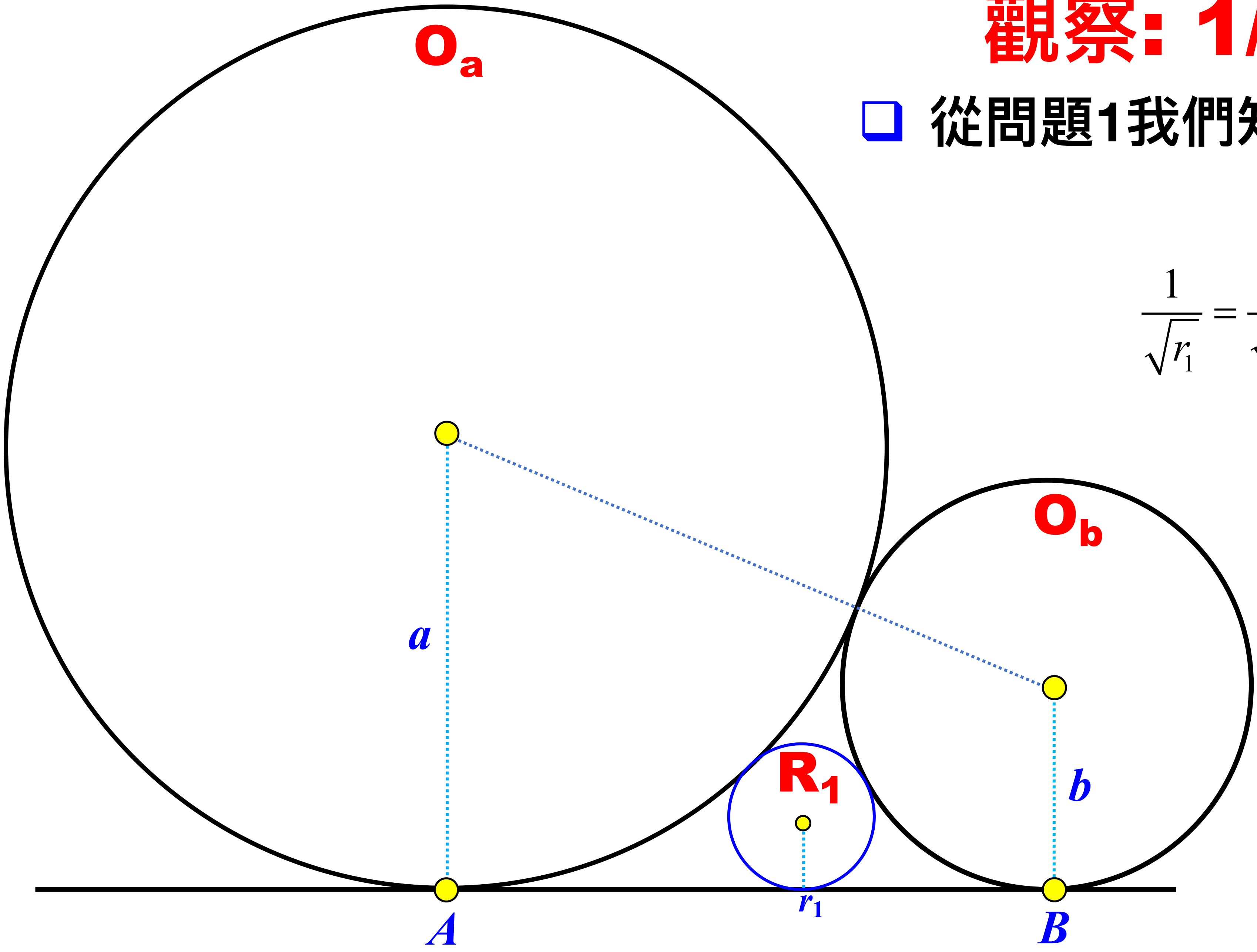
問題:

用圓 O_a和圓O_b 的半徑（也就是 a 和 b ）表示圓 R_n 的半徑。

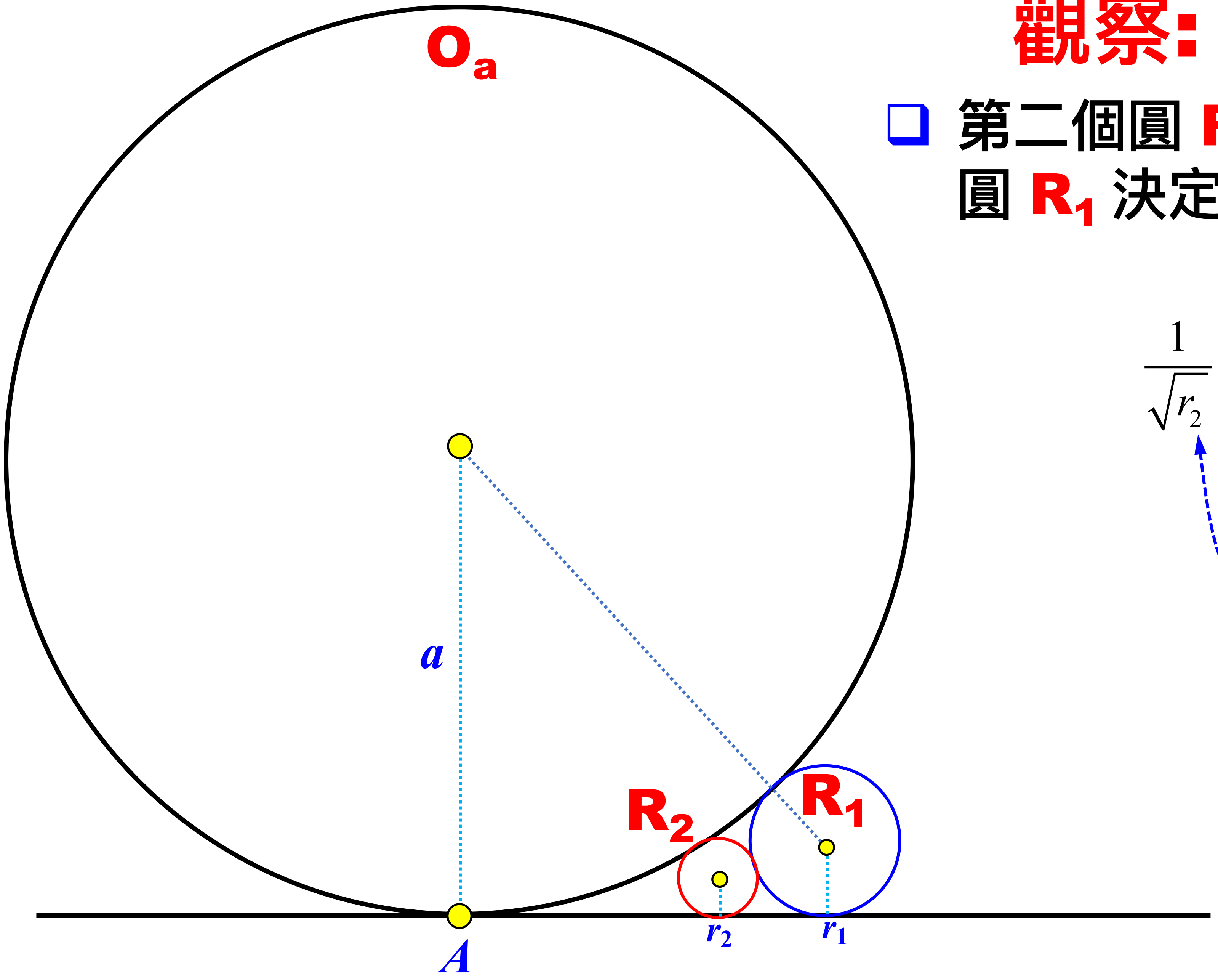
觀察: 1/3

- 從問題1我們知道:

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$



觀察: 2/3



- 第二個圓 R_2 的半徑r_2是由圓 O_a和圓 R_1 決定的:

$$\frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

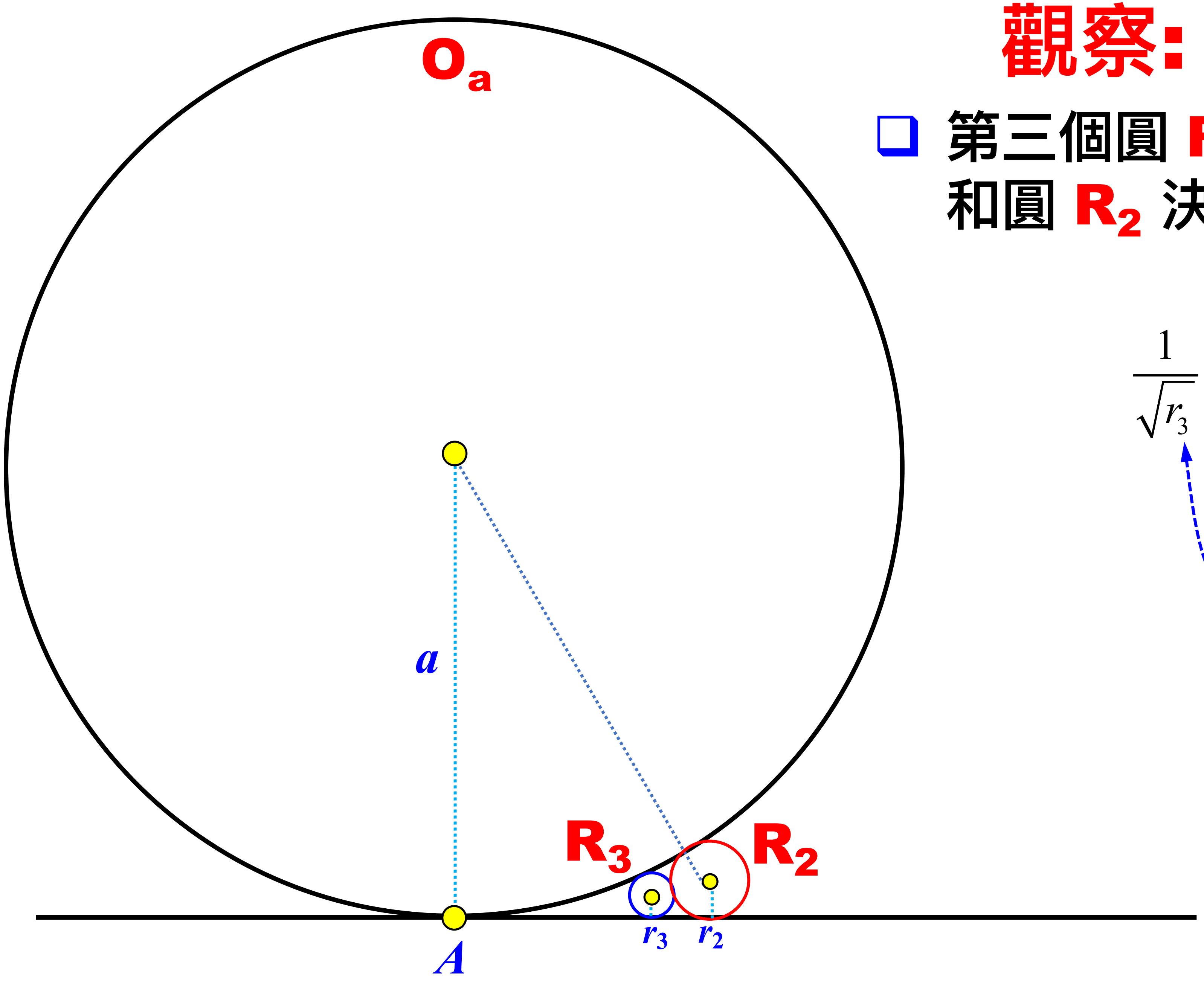
觀察: 3/3

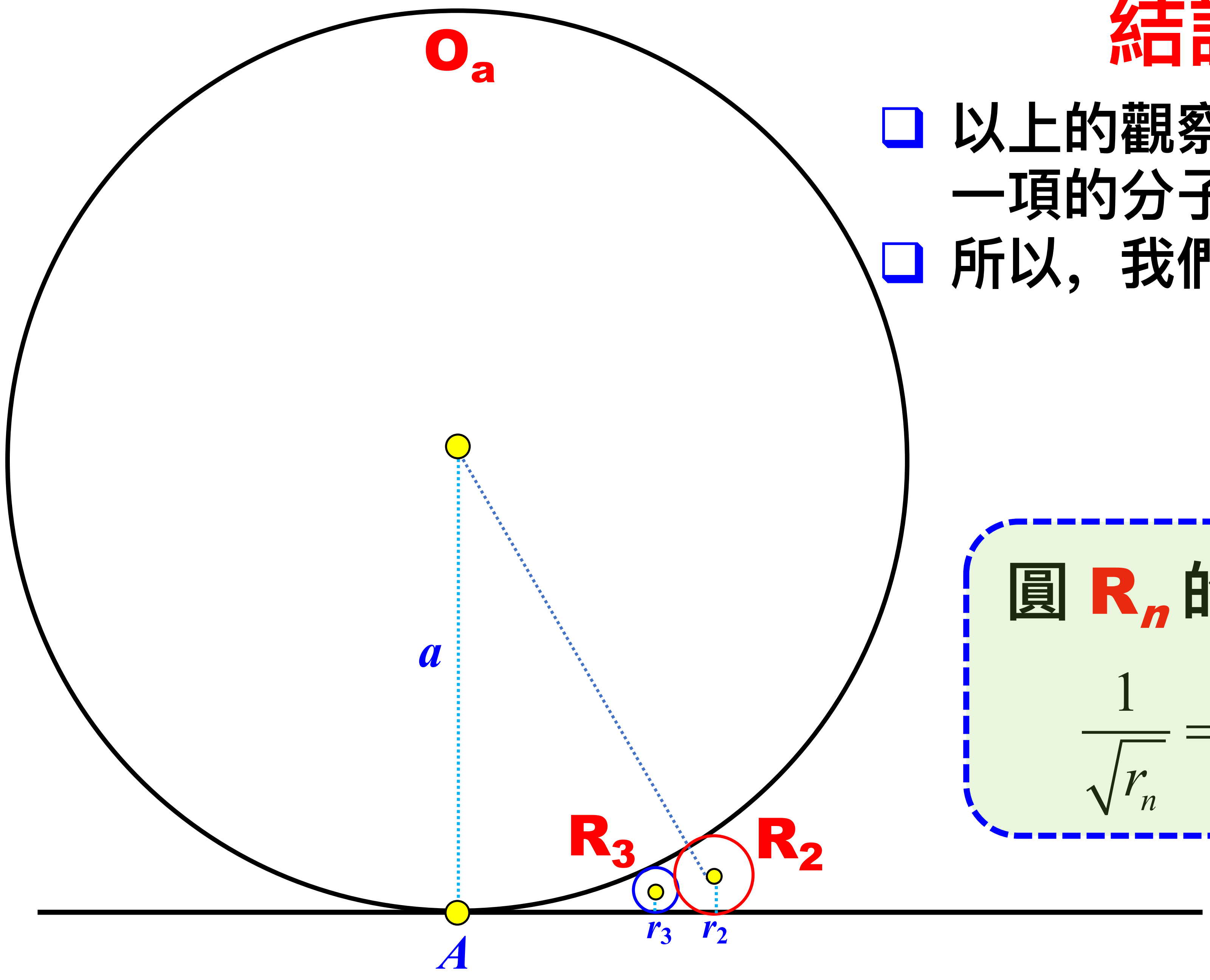
- 第三個圓 R_3 的半徑 r_3 則由圓 O_a 和圓 R_2 決定：

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} + \left(\frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$$

$$= \frac{3}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$





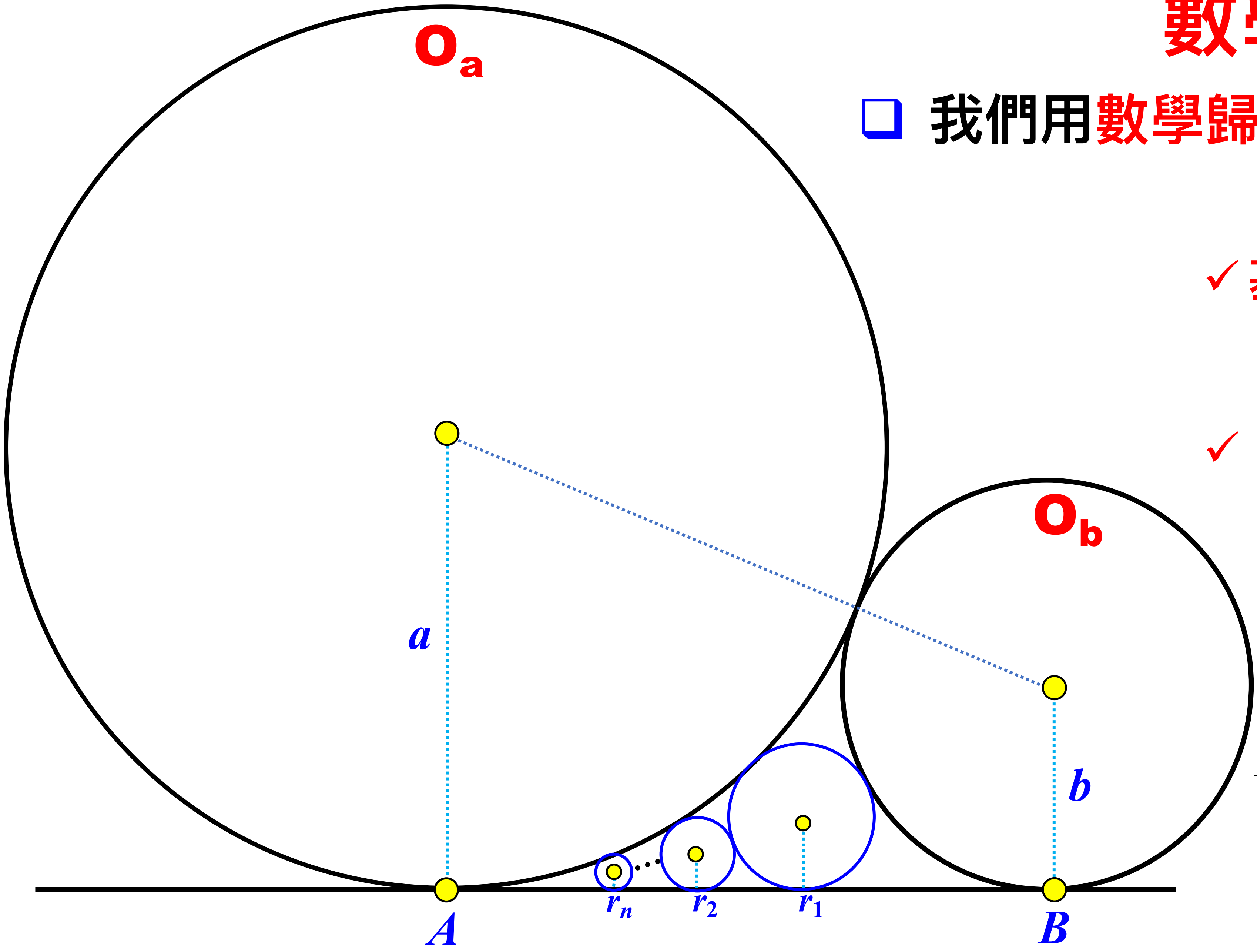
結論

- 以上的觀察指出 r_n 的下標和 $\sqrt{a}$ 這一項的分子有密切關係。
- 所以，我們有以下的結論：

圓 R_n 的半徑 r_n 為

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{n}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

數學歸納法



- 我們用**數學歸納法**証明這個結論：

✓ 基礎, n = 1:

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}$$

✓ 假設結論在 n 時為真：

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{n}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}$$

於是 R_{n+1} 的半徑為

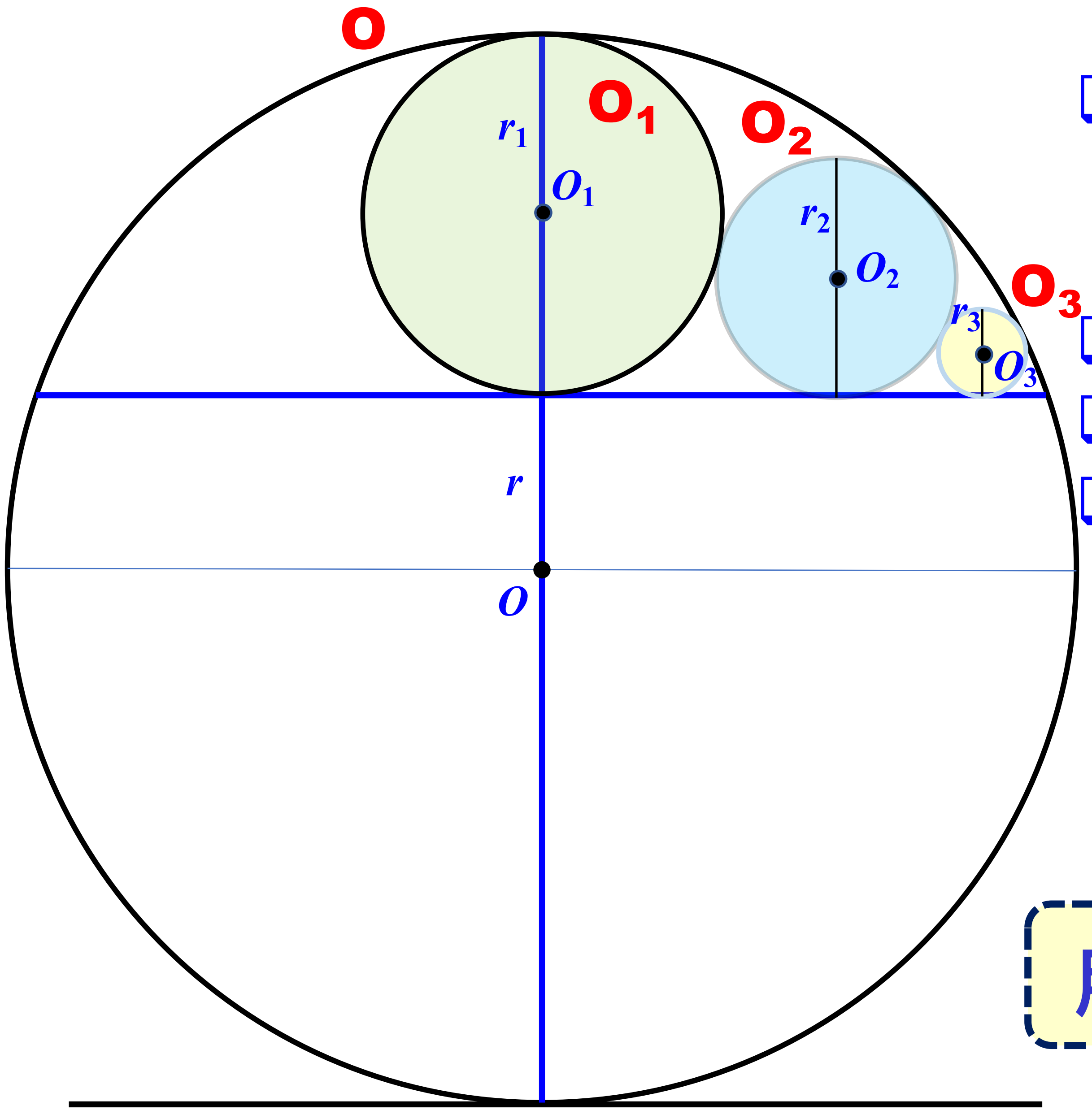
$$\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\boxed{\frac{1}{\sqrt{r_n}}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\boxed{\left(\frac{n}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)}$$

$$=\frac{n+1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}} \quad \blacksquare$$

第二節

問題3 和 問題4

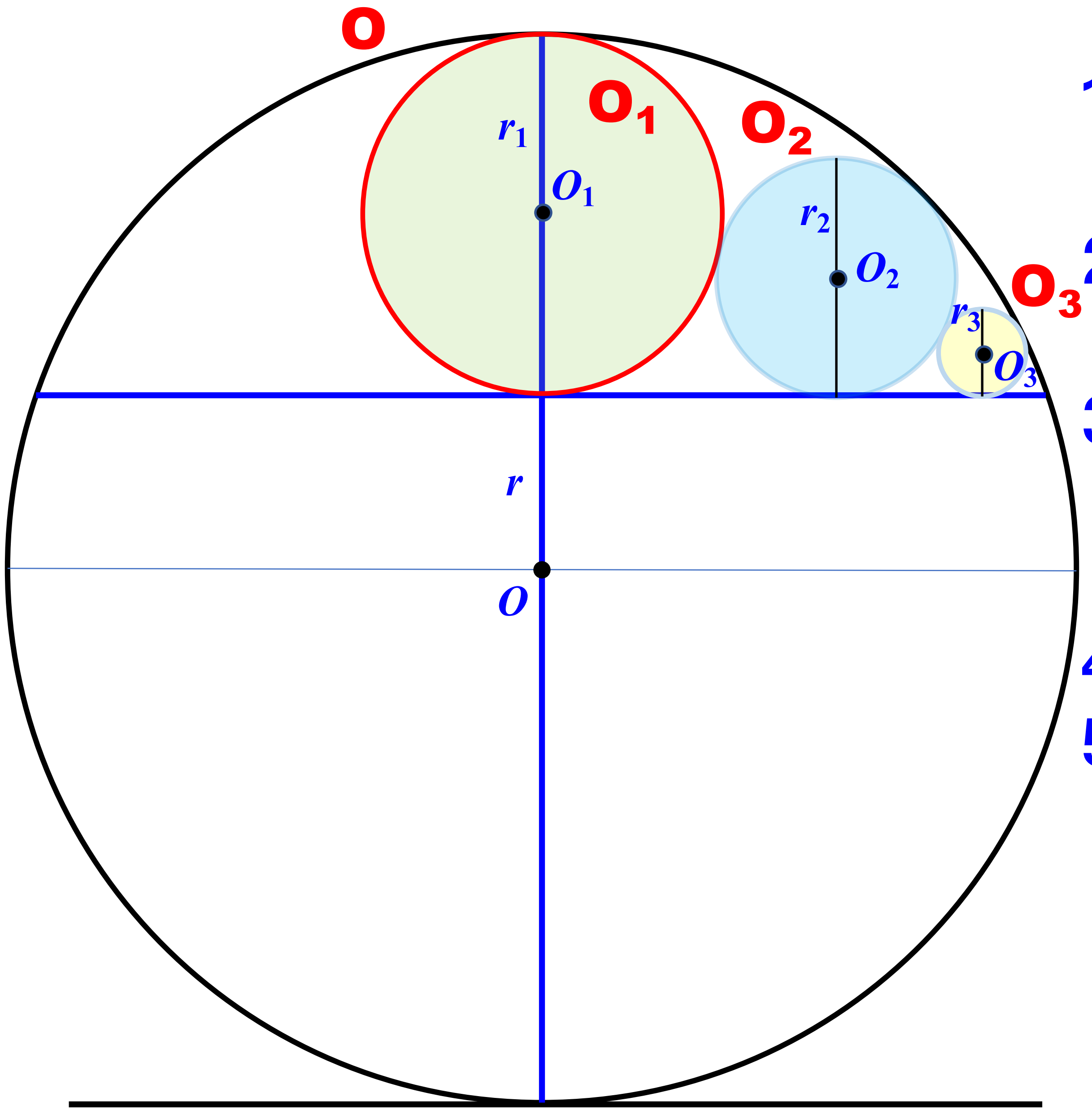
問題3



問題

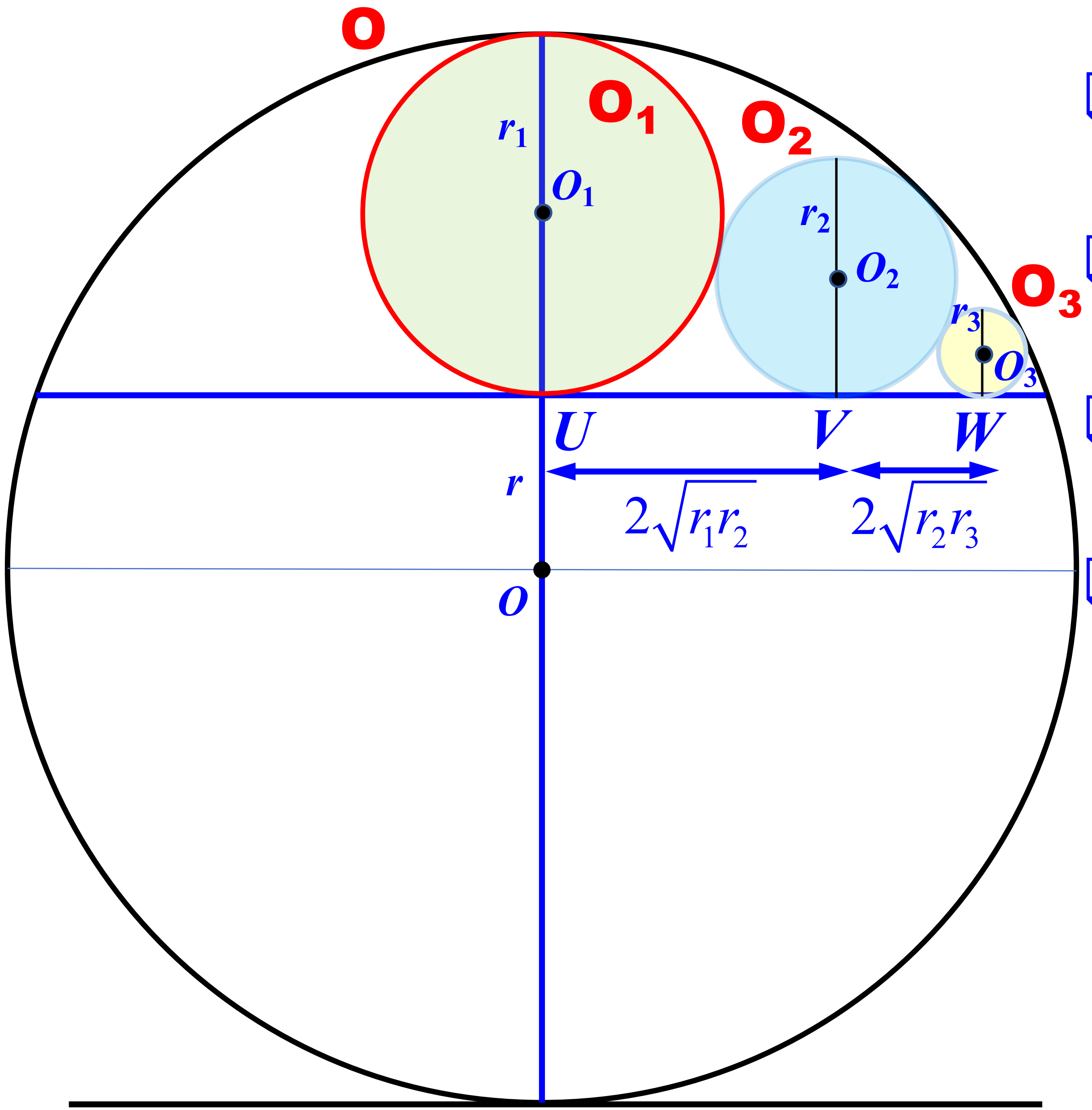
- 假設有一個圓心為 O半徑為 r的圓O 、一道弦、以及一個和 O在北極相切又和弦在弦的中點相切的圓 O_1 。
- 圓 O_2和圓O 、圓 O_1和弦相切。
- 又圓 O_3和圓 O 、圓 O_2和弦相切。
- 假設圓 O_1 、圓 O_2和圓 O_3的半徑分別是 r_1、 r_2 和 r_3 。

用 r_1 和 r_3 表示 r 。



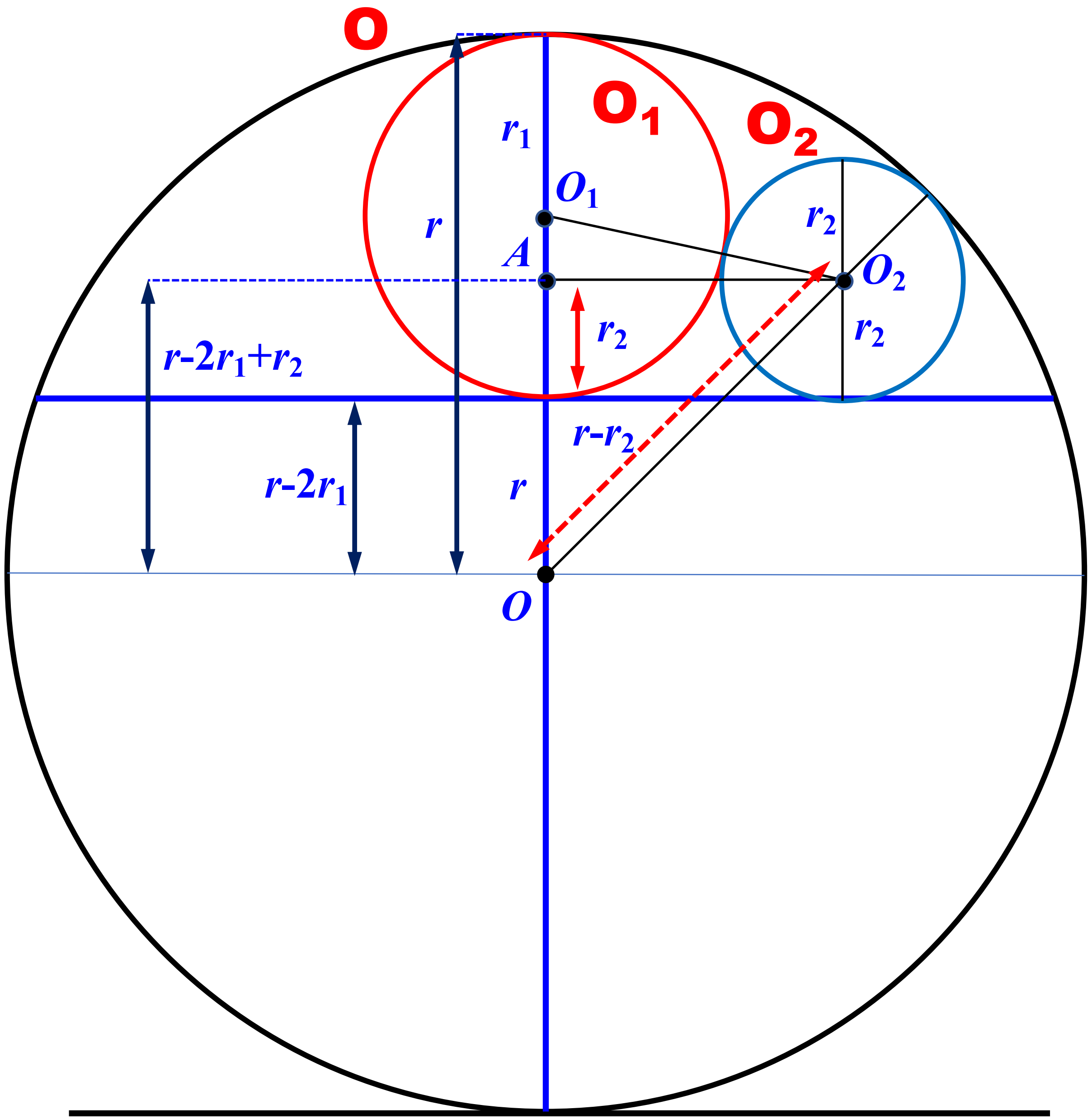
討論

1. 圓 O_1 和它的半徑 r_1 是由已知的圓 O 和弦唯一決定的
2. 圓 O_2 和它的半徑 r_2 是由已知的圓 O 、圓 O_1 和弦唯一決定
3. 同樣地，圓 O_3 和它的半徑 r_3 是由已知的圓 O 、圓 O_1 、圓 O_2和弦唯一決定
4. 所以，圓 O_1 、O_2 和 O_3 息息相關
5. 結果是，知道了O_1 和 O 之後，應該就可以求出 O_2



觀察

- 從每一個圓的圓心往弦作垂線，令垂足為 U, V 和 W（見左圖）。
- 由預備定理，線段 UV 和線段 VW 的長度分別是 $\overline{UV}=2\sqrt{r_1r_2}$ 和 $\overline{VW}=2\sqrt{r_2r_3}$。
- 因為 r_1, r_2 和 r_3 是 r 的函數，我們可以從這個四個參數的關係中消除 r_2。
- 換言之，我們找出 r, r_1 和 r_2 的關係，也找出 r, r_1, r_2 和 r_3 的關係，然後從這兩個關係中消去 r_2，就會得到期望的結果。



第一部分: 1/2

- 用 r 和 r_1 表示 r_2
  - ✓ 從 O_2 向直線 $\overleftrightarrow{O_1O}$ 作垂線，令垂足為 A。
  - ✓ 我們得到：

$$\overline{OA} = (r - 2r_1) + r_2$$

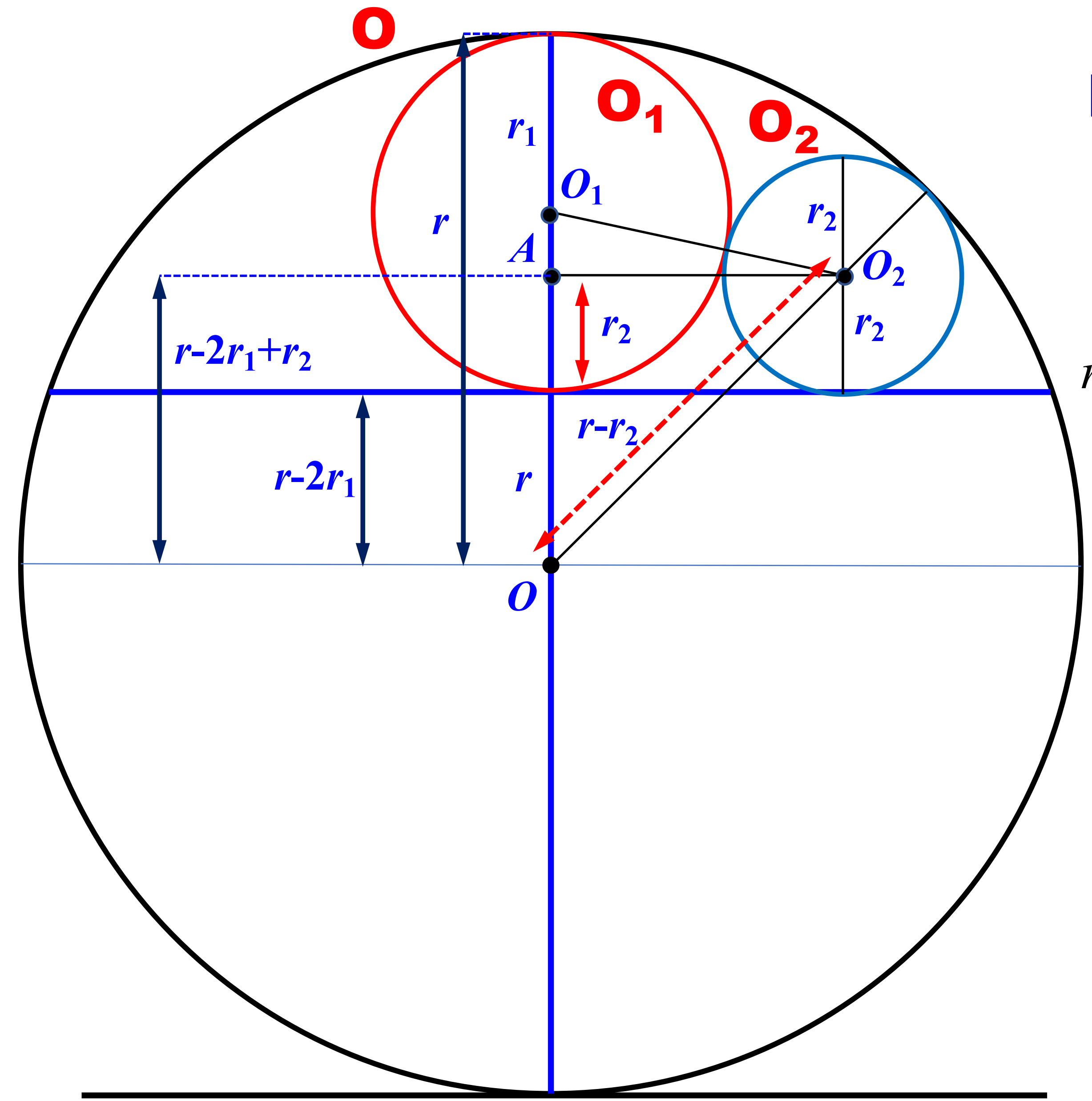
$$\overline{AO_2} = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

$$\overline{OO_2} = r - r_2$$

  - ✓ 因為 ΔOAO_2 是個直角三角形，我們有：

$$\overline{OO_2}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AO_2}^2$$

$$(r - r_2)^2 = (r - 2r_1 + r_2)^2 + \left(2\sqrt{r_1 r_2}\right)^2$$



第一部分: 2/2

- 用 r 和 r_1 表示 r_2
  - ✓ 經過一些計算後得到:

$$(r-r_2)^2=(r-2r_1+r_2)^2+\left(2\sqrt{r_1r_2}\right)^2$$

$$r^2-2rr_2+r_2^2=\left(r^2+4r_1^2+r_2^2-4rr_1+2rr_2-4r_1r_2\right)+4r_1r_2$$

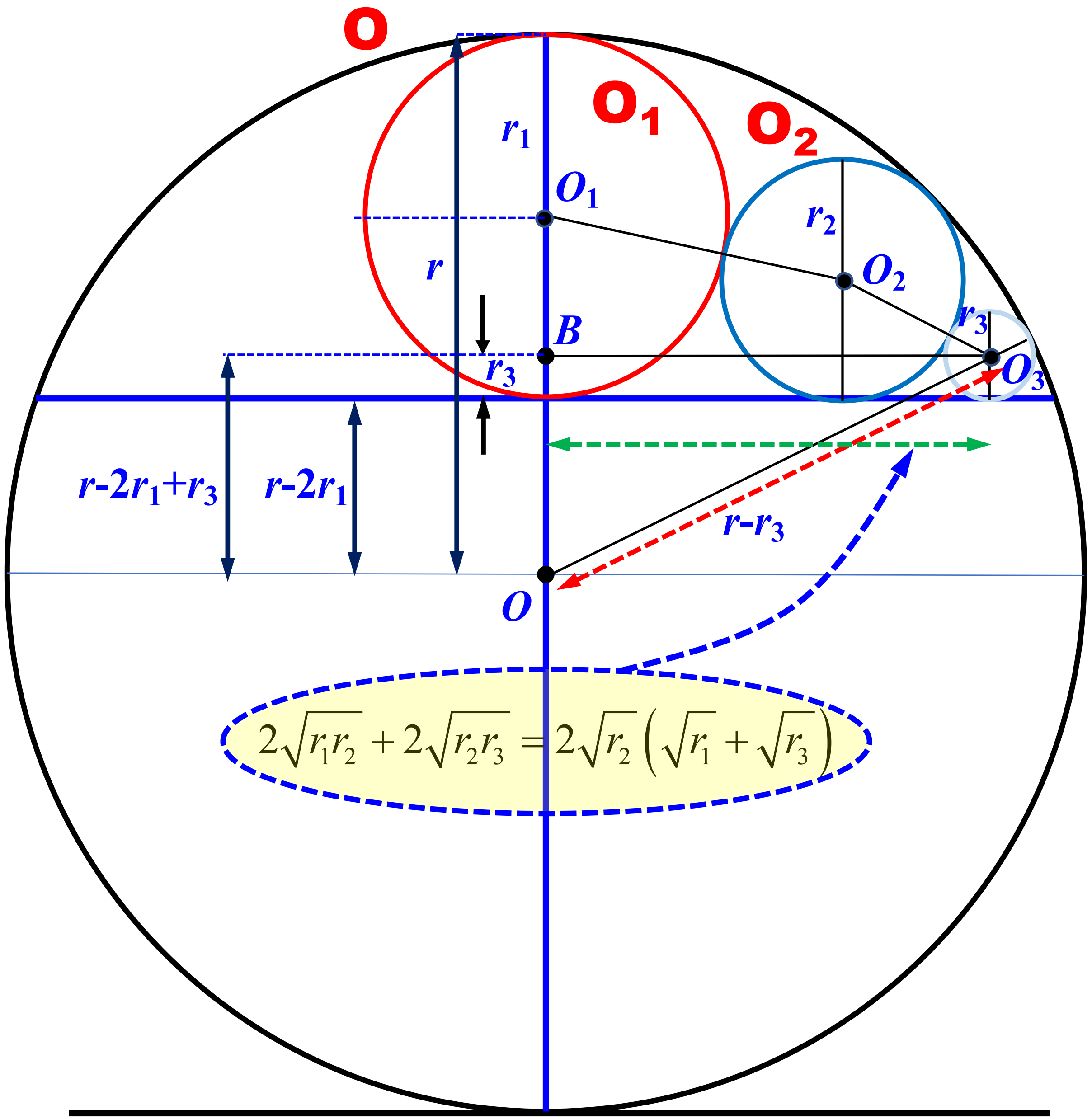
$$-2rr_2=4r_1^2-4rr_1+2rr_2$$

$$4rr_2=4rr_1-4r_1^2$$

$$rr_2=rr_1-r_1^2$$

$$\boxed{r_2=\frac{r_1(r-r_1)}{r}}$$

這道式子會在問題4中用到



第二部分: 1/2

- 用 r, r_1和 r_3 表示 r_2
  - ✓ 這部分的概念和第一部分相同
  - ✓ 從 O_3 往直線$\overleftrightarrow{OO_1}$作垂線，令垂足為 B
  - ✓ 於是我們有

$$\overline{OB}=\left(r-2r_1\right)+r_3$$

$$\overline{BO_3}=2\sqrt{r_2}\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3}\right)$$

$$\overline{OO_3}=r-r_3$$

  - ✓ 因為 ΔOBO_3是直角三角形，這得到have:

$$\overline{OO_3}^2=\overline{OB}^2+\overline{BO_3}^2$$

$$(r-r_3)^2=(r-2r_1+r_3)^2+\left(2\sqrt{r_2}\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3}\right)\right)^2$$

第二部分: 2/2

- 用 r, r_1和 r_3 表示 r_2

r_2 只在這一項中出現

$$(r-r_3)^2=(r-2r_1+r_3)^2+\left(2\boxed{\sqrt{r_2}}\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3}\right)\right)^2$$

a^2-b^2 = (a+b)(a-b)

$$4r_2\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3}\right)^2=(r-r_3)^2-(r-2r_1+r_3)^2$$

$$=\left[(r-r_3)-(r-2r_1+r_3)\right]\cdot\left[(r-r_3)+(r-2r_1+r_3)\right]$$

$$=(2r_1-2r_3)(2r-2r_1)$$

$$r_2\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3}\right)^2=\boxed{(r_1-r_3)}(r-r_1)$$

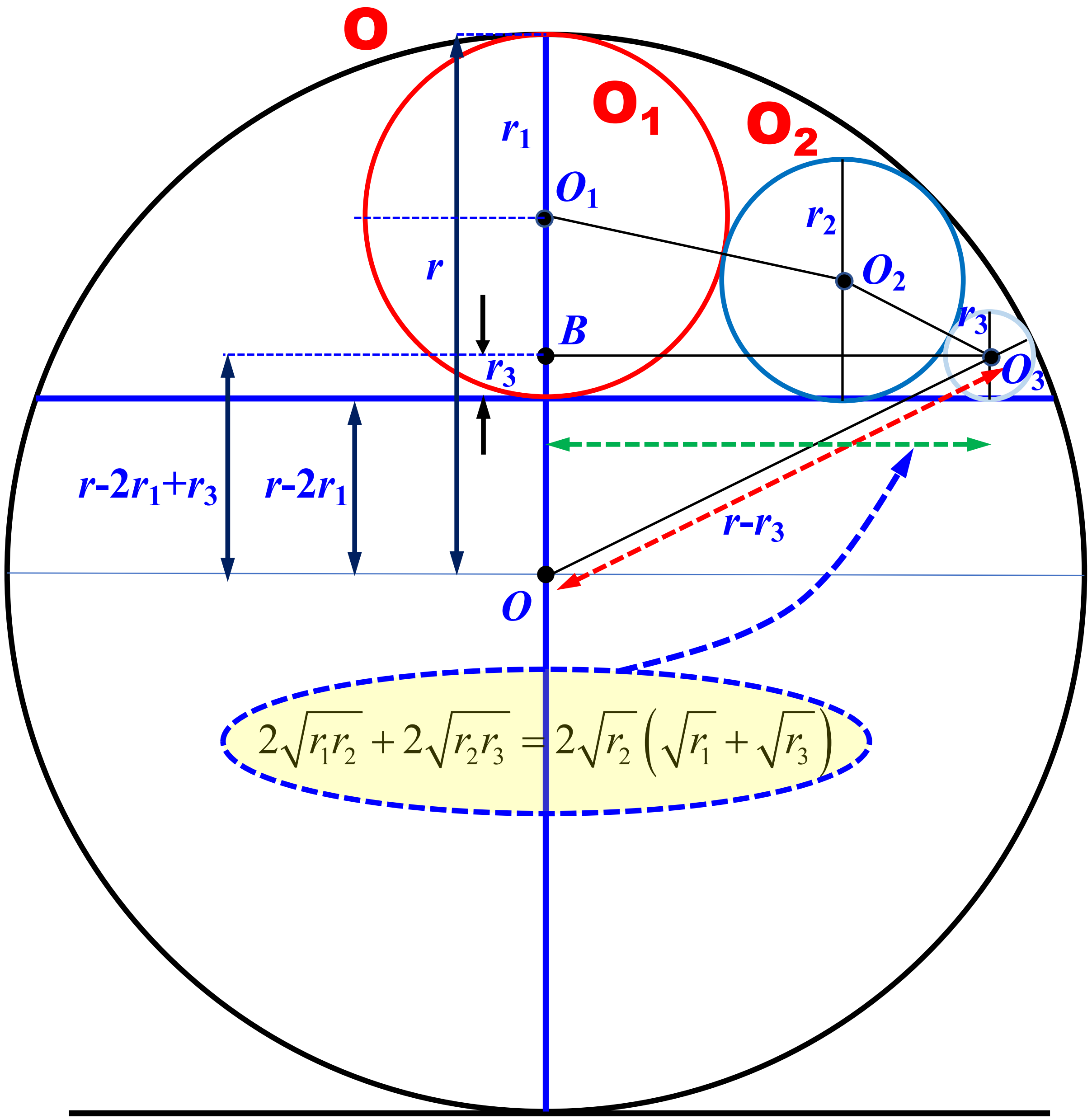
$$r_1-r_3=\left(\sqrt{r_1}\right)^2-\left(\sqrt{r_3}\right)^2=\left(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_3}\right)\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3}\right)$$

$$=\boxed{\left[\left(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_3}\right)\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3}\right)\right]}(r-r_1)$$

$$r_2\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3}\right)=(r-r_1)\left(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_3}\right)$$

$$\boxed{r_2=\frac{(r-r_1)\left(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_3}\right)}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3}}}$$

這是期望的結果



第三部分

- 消去 r_2.

第一部分　　第二部分

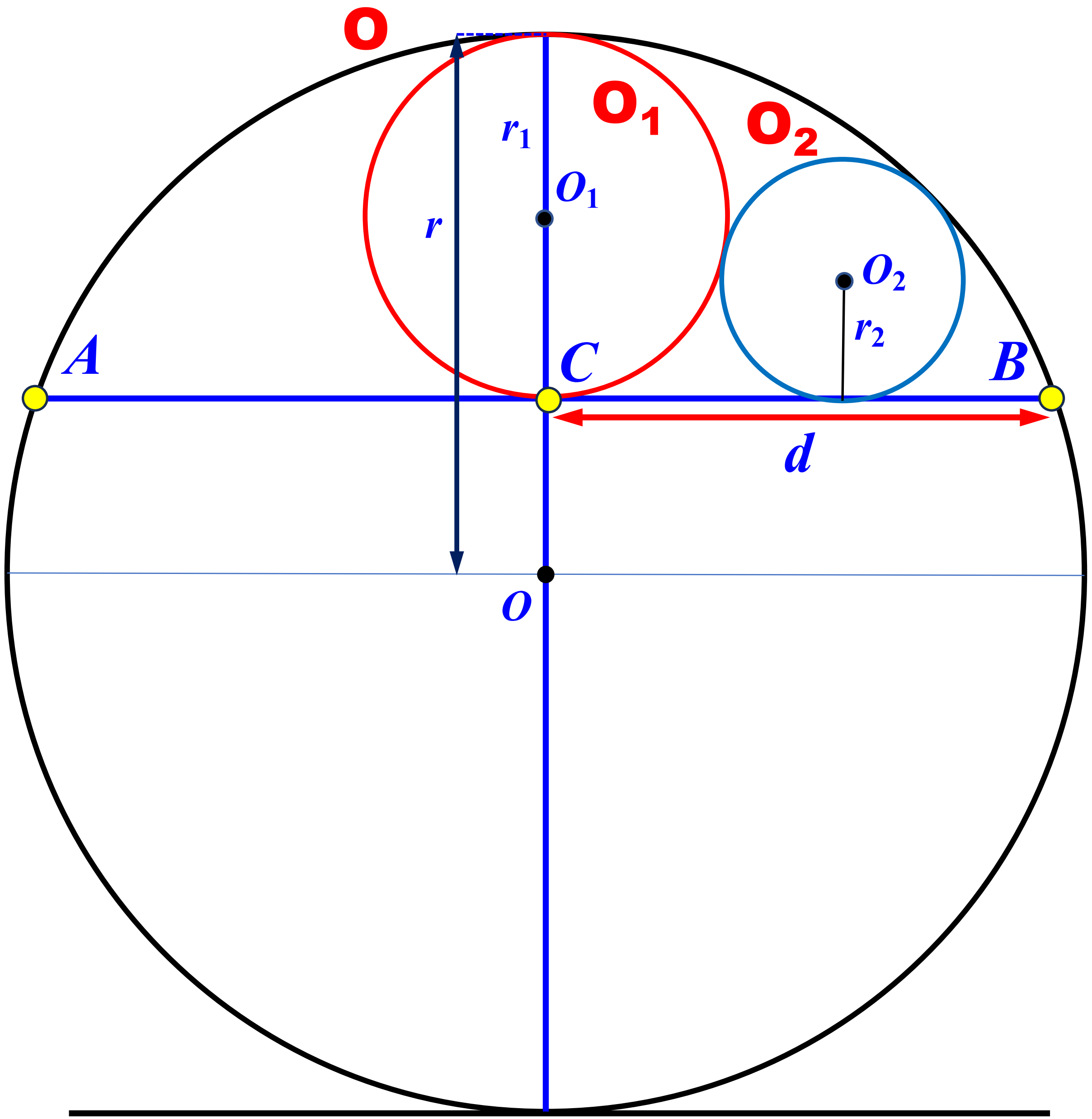
$$\frac{r_1\left(r-r_1\right)}{r}=r_2=\frac{\left(r-r_1\right)\left(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_3}\right)}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3}}$$

$$\frac{r_1}{r}=\frac{\sqrt{r_1}-\sqrt{r_3}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3}}$$

$$\boxed{r=r_1\cdot\frac{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3}}{\sqrt{r_1}-\sqrt{r_3}}}$$

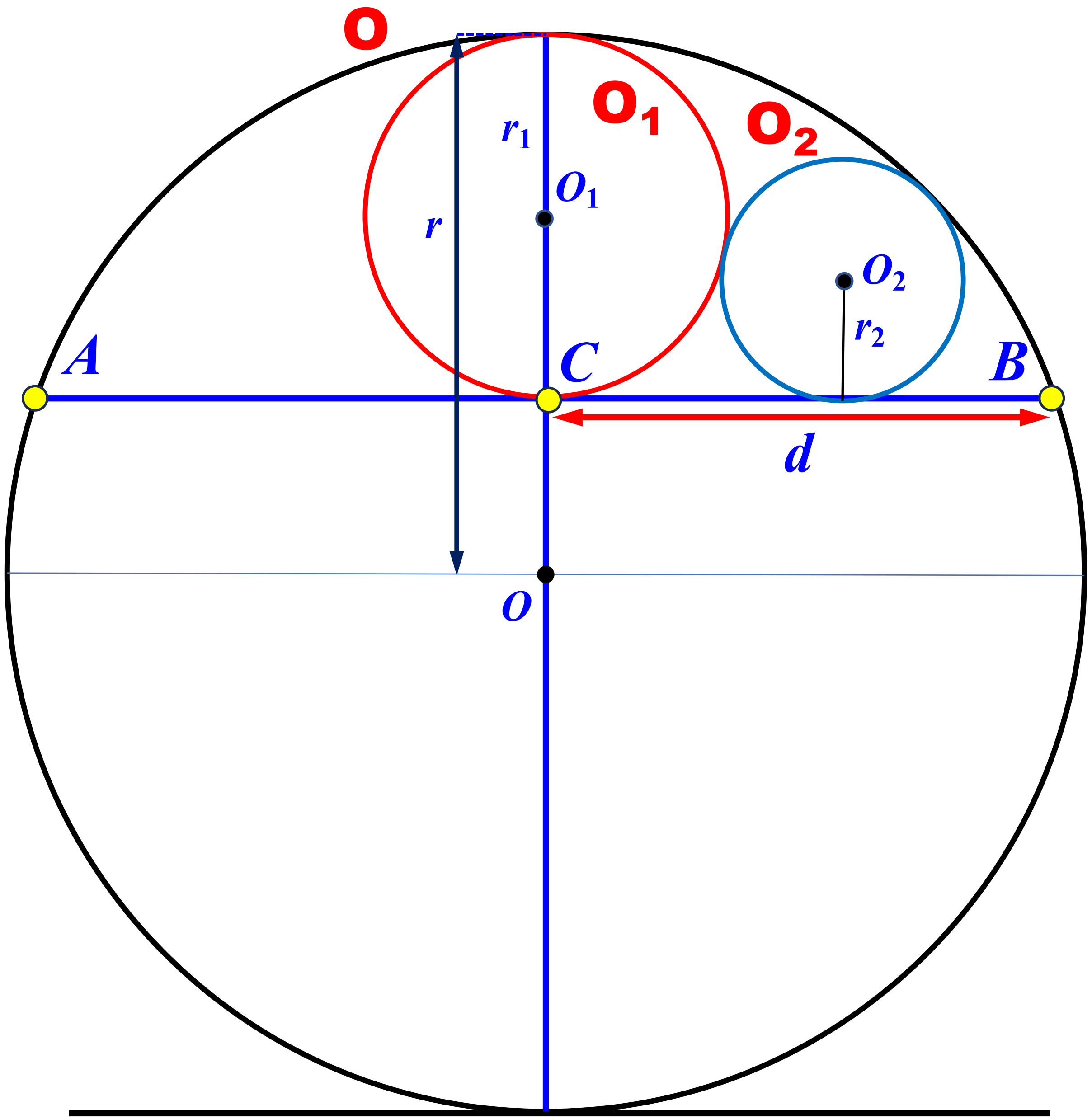
最終結果

問題4
問題3的一個變形



問題

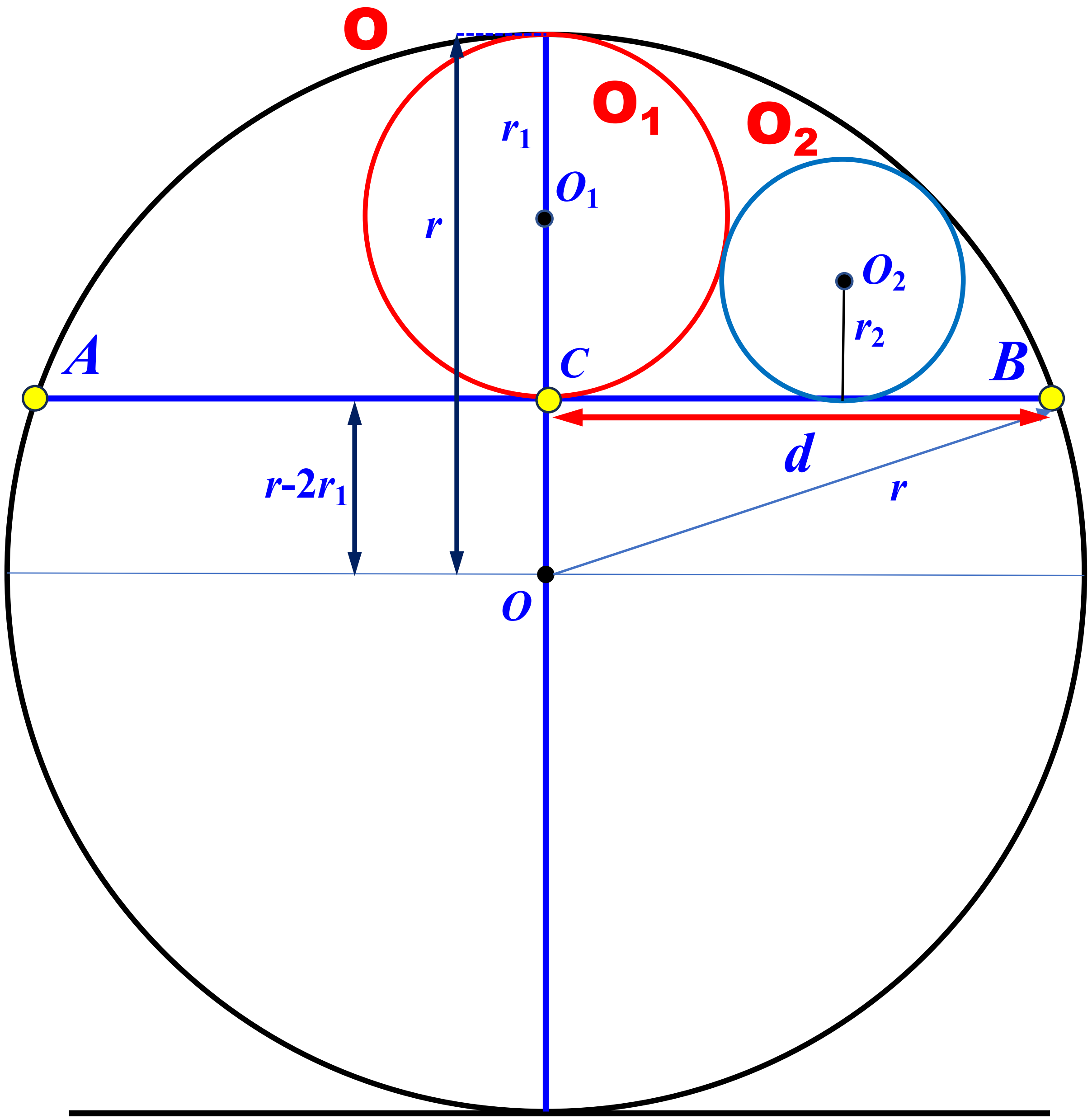
- 就像上一題，我們有一個圓 O 、圓心為 O 半徑為 r ，還有一道弦 $\overline{AB}$ 。
- 圓 $\mathbf{O_1}$ （圓心為 O_1 、半徑為 r_1 ）和圓 O 在北極相切、又和弦 $\overline{AB}$ 在它的中點 C 相切。
- 圓 $\mathbf{O_2}$ （圓心為 O_2 、半徑為 r_2 ）和 O, $\mathbf{O_1}$, $\overline{AB}$ 相切。
- 令 d 為線段 $\overline{AB}$ 長的一半。
- 用 r 和 r_2 表示 d 。請注意，並沒用到 r_1 。



解答: 1/2

- 問題3中 r_2 是用做找出 r 的中間站。
- 在這個問題， r_1 是用來做中間站。也就是說，我們找出 r, r_1 和 r_2 的關係，再找出 r, r_1 和 d 的關係
- 然後消去 r_1！
- 從上一題的第一 部分，r, r_1 和 r_2 之間的關係為：

$$rr_2 = rr_1 - r_1^2$$



解答: 2/2

- ΔOCB 是個直角三角形， $\angle C$ 是90度
- 所以，我們得到

$$d^2 = r^2 - (r-2r_1)^2$$
$$= (r-(r-2r_1))(r+(r-2r_1))$$
$$= (2r_1)(2(r-r_1))$$
$$= 4r_1(r-r_1) = \boxed{4(rr_1 - r_1^2)}$$

問題7會用到此式

- 因為我們有 $rr_2 = rr_1 - r_1^2$ 和 $d^2 = 4rr_2$，所以 $d = 2\sqrt{rr_2}$

$$\boxed{\overline{AB} = 4\sqrt{rr_2}}$$

第三節

問題5、6和7

問題5

稍具挑戰性

我們會談到什麼

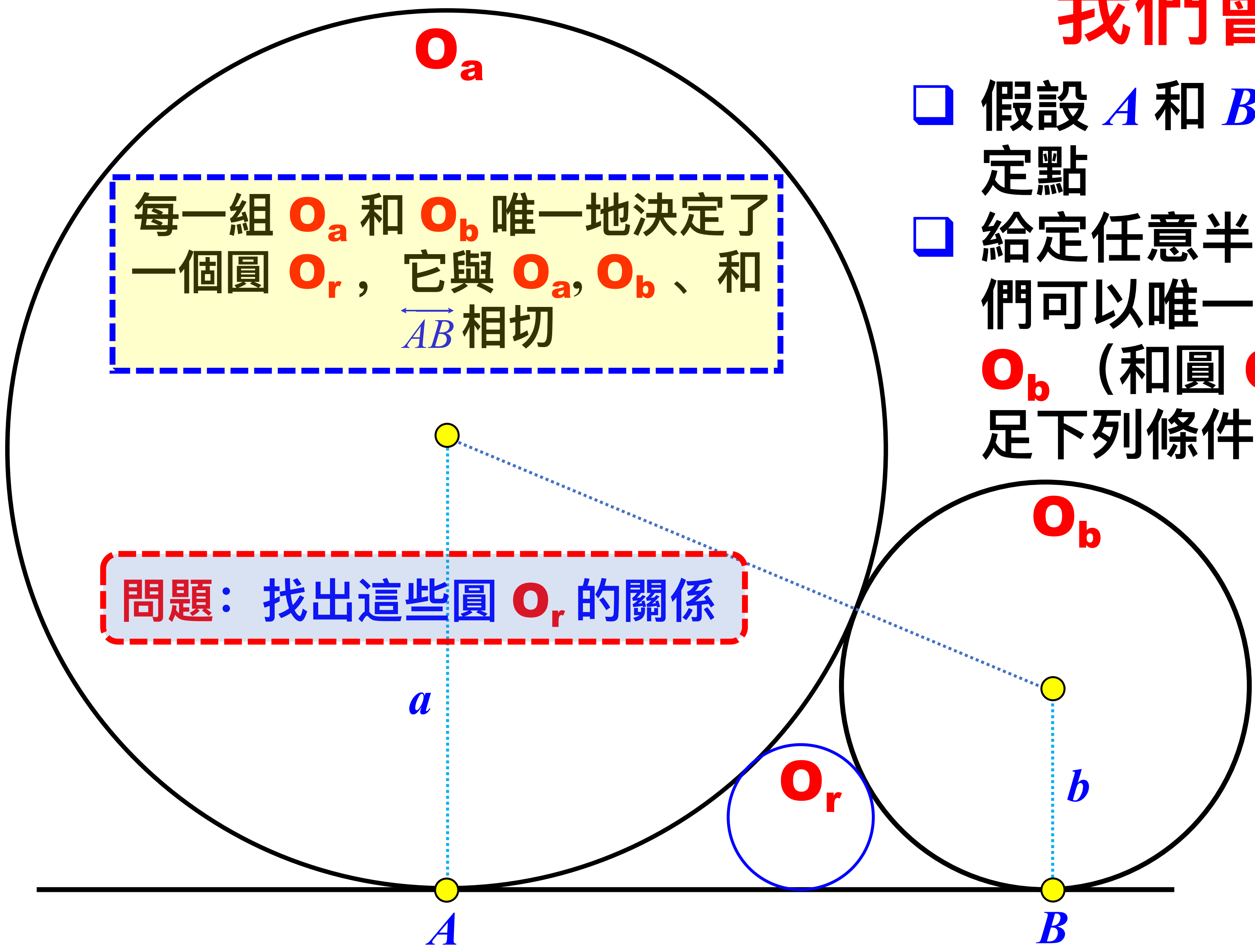
- 假設 A 和 B 是直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上的兩個固定點
- 給定任意半徑為 a 的圓 O_a，我們可以唯一地作出半經為 b 的圓 O_b（和圓 O_a 在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 同側）滿足下列條件：

✓ O_a 和 O_b 互切

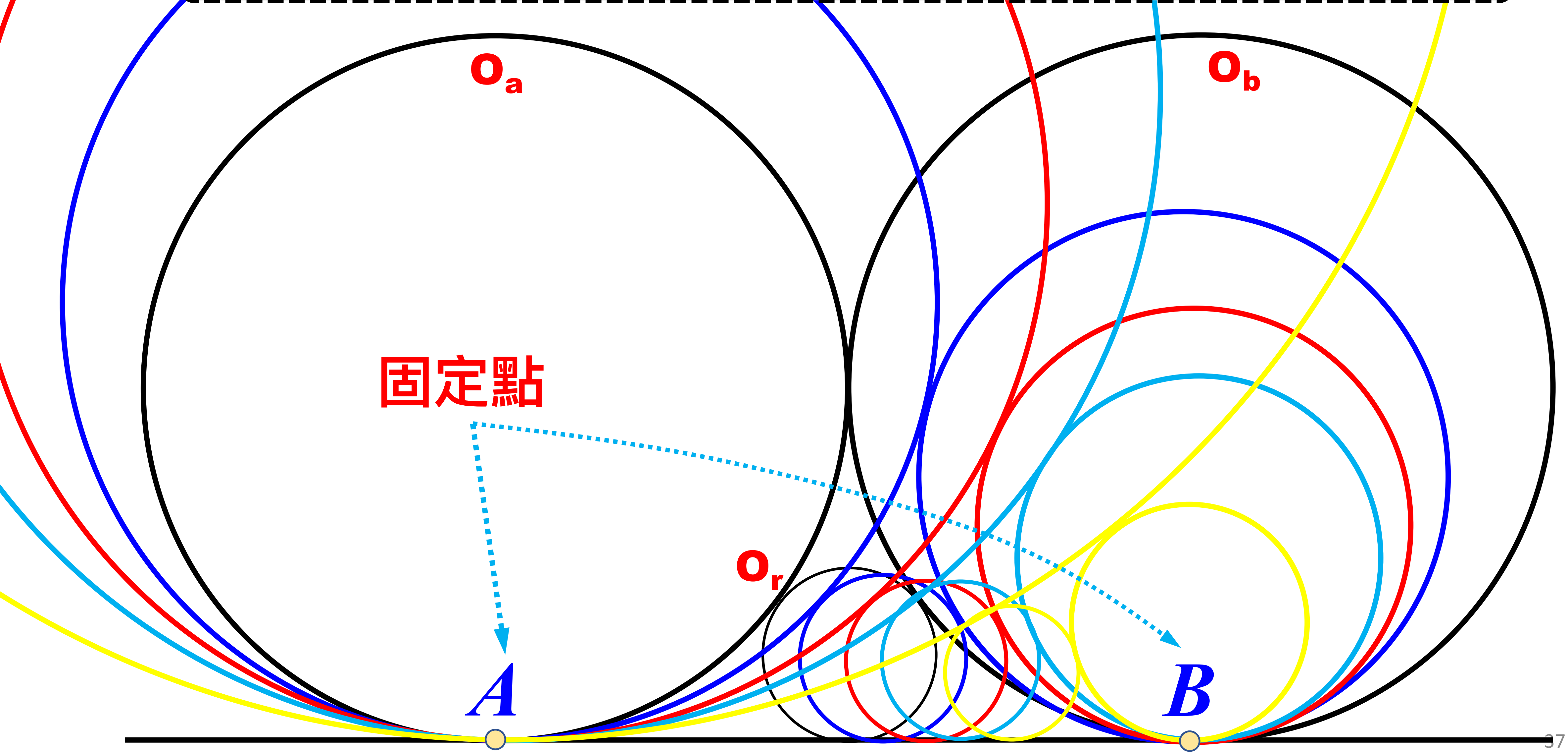
✓ O_a 和 O_b 與直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 分別在 A 與 B 相切

每一組 O_a 和 O_b 唯一地決定了一個圓 O_r，它與 O_a, O_b、和 $\overleftrightarrow{AB}$ 相切

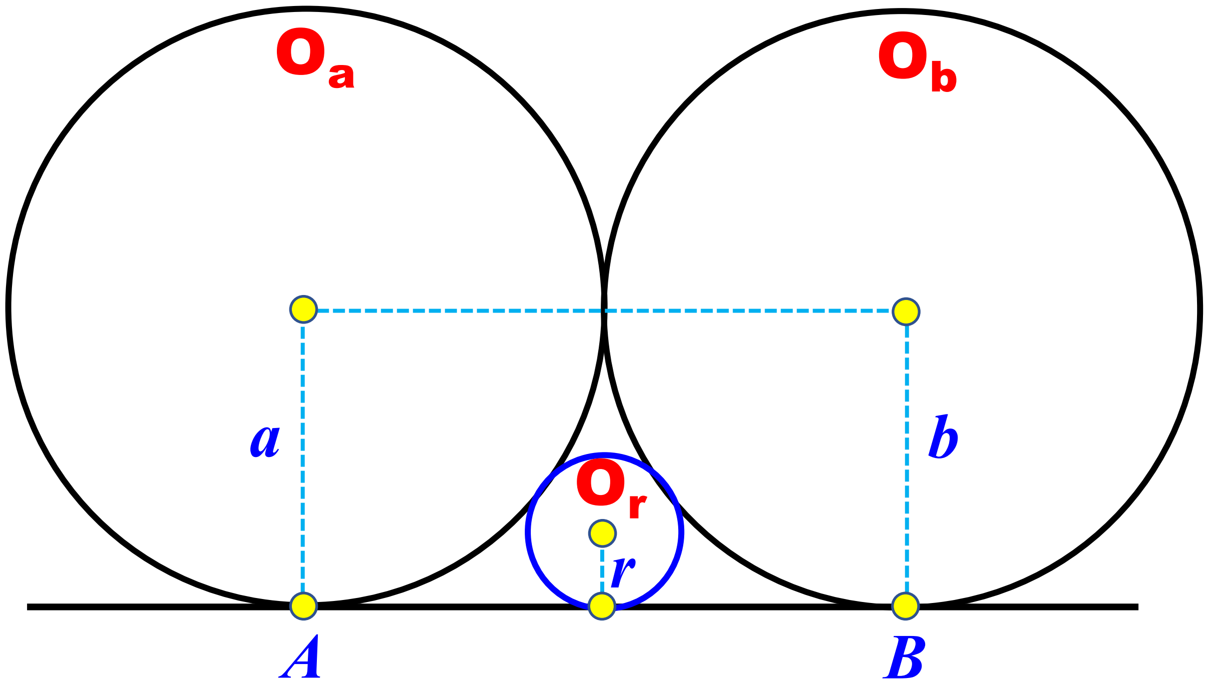
問題：找出這些圓 O_r 的關係



當圓 O_a 愈來愈大，圓 O_b 就愈來愈小，而圓 O_r 也愈變愈小



觀察



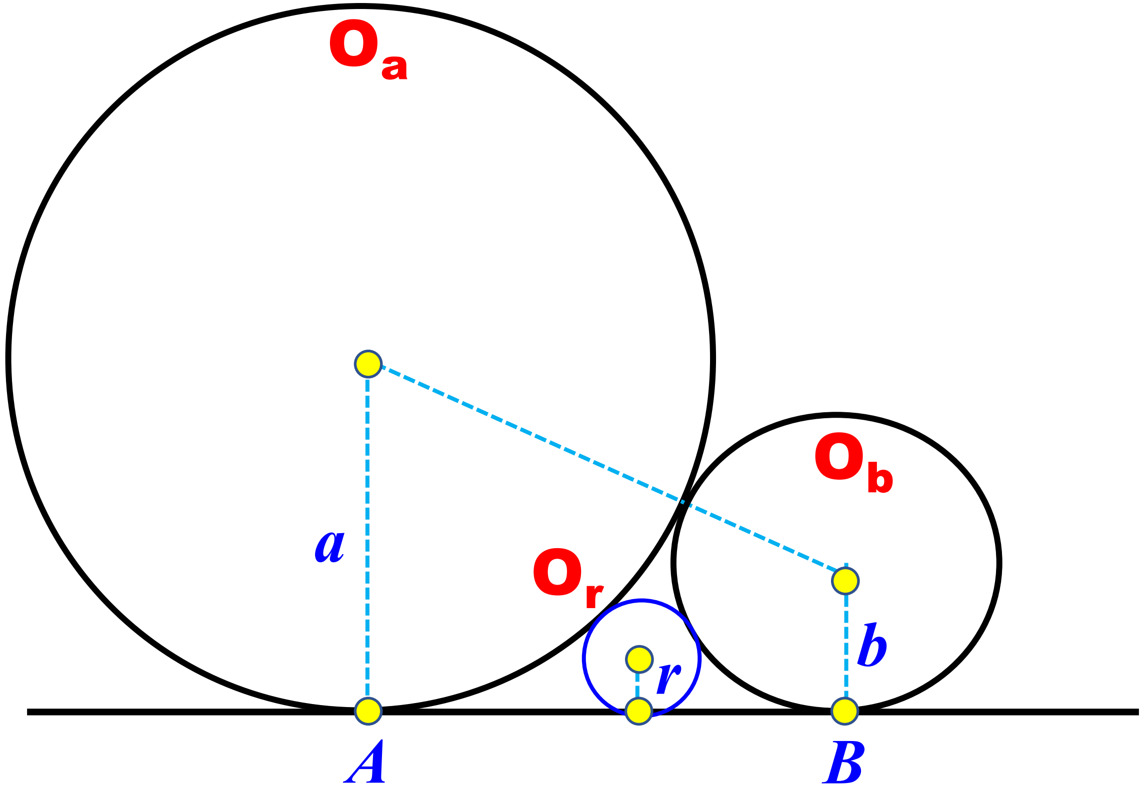
- 當圓 O$_a$ 變大時，圓 O$_b$ 會變小
- 當圓 O$_a$ 變非常大時，圓 O$_b$ 變極小而趨於一點（固定點 B）
- 若圓 O$_a$ 和圓 O$_b$ 等半徑，圓 O$_r$ 就是最大的
- 從問題1得到

$$\frac{1}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{2}{\sqrt{a}}$$

於是最大的圓 O$_r$ 的半徑 r 為：

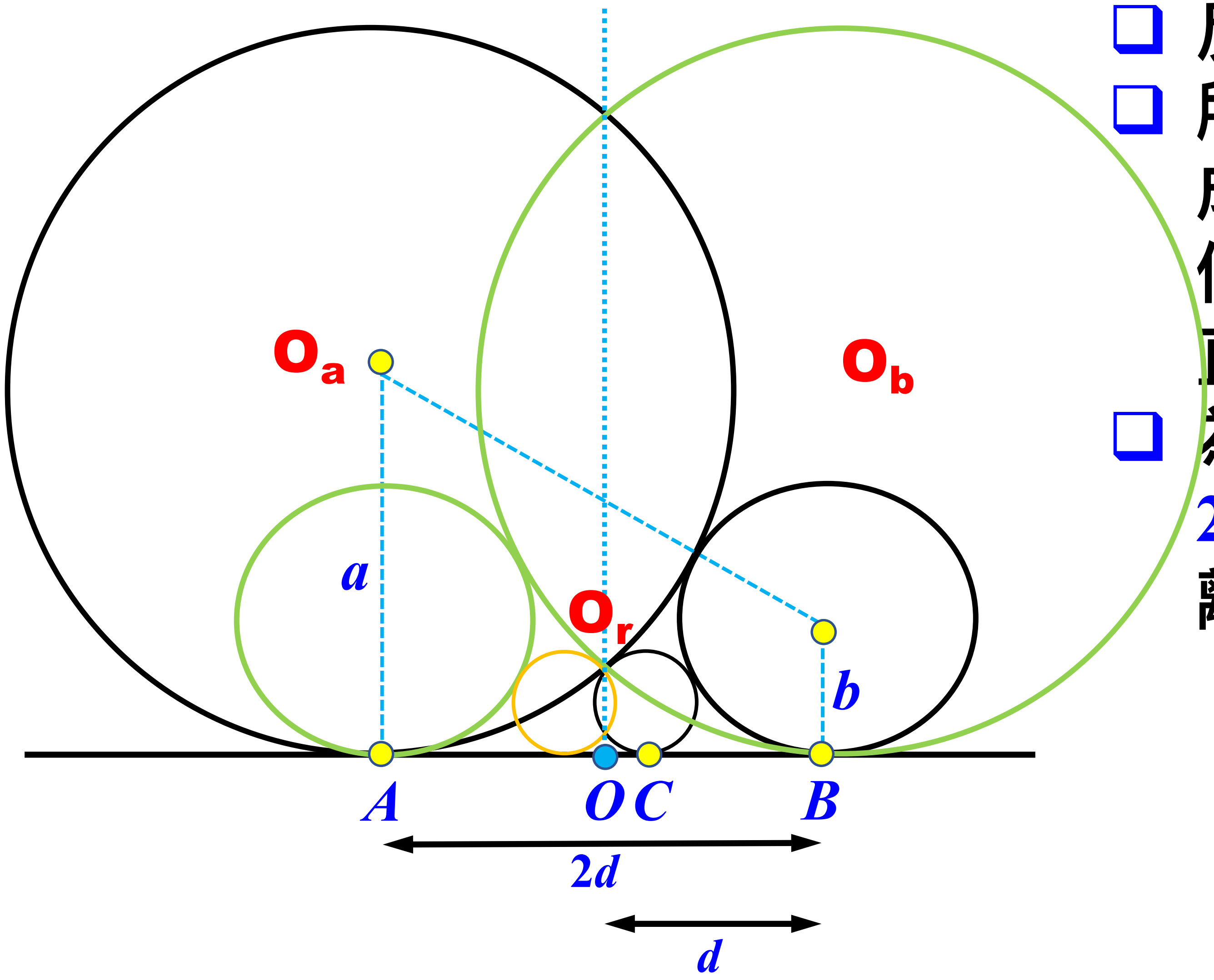
$$r=\frac{a}{4}=\frac{b}{4}$$

問題



- 每一組圓 O_a 和 O_b 都唯一地決定了一個圓 O_r
- 因為有無限多組圓 O_a 和圓 O_b，我們也有無限多個圓 O_r
- 請注意到 A 和 B 是固定點的假設
- 若 A 和 B 固定，試找出圓群 O_r 彼此間的關係

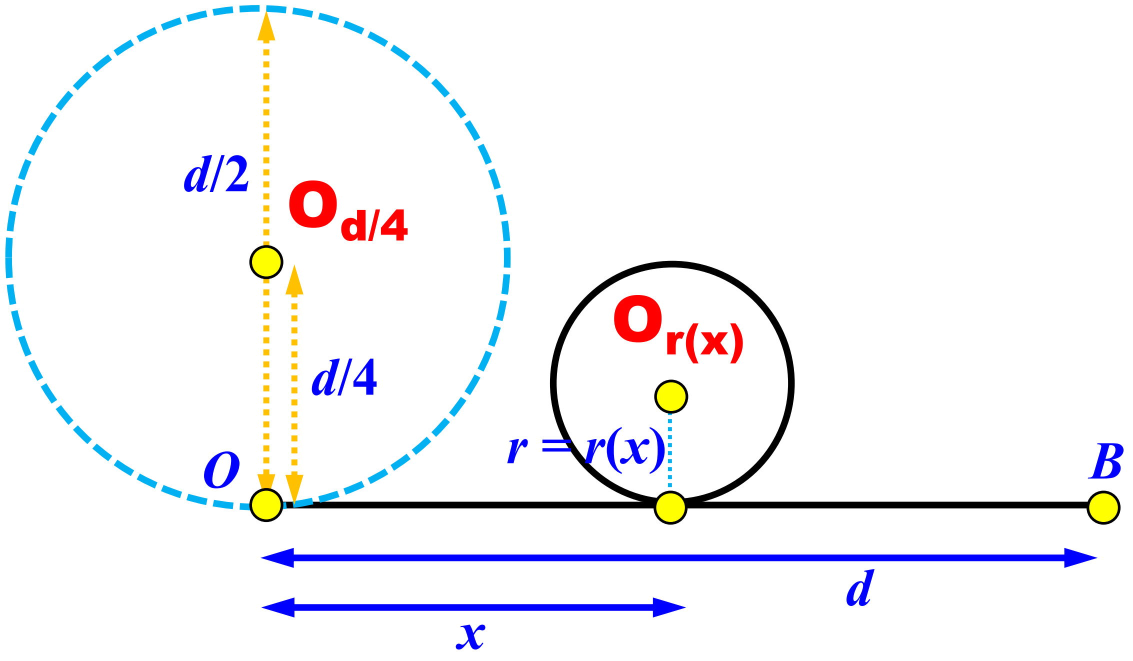
分析: 1/3



- 當圓 O_a 變大時，圓 O_b 變小
- 反之，當圓 O_b 變大時圓 O_a 變小
- 所以，由圓 O_a、圓 O_b 和圓 O_r 構成的三圓組是對稱的；換言之，它們以經過線段 $\overline{AB}$ 的中點 O 垂直於直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的直線對稱
- 為方便起見，令線段 $\overline{AB}$ 的長度為 $2d$，於是從該線段中點到兩端的距離 $\overline{OB}=\overline{OA}$ 就都是 d

分析: 2/3

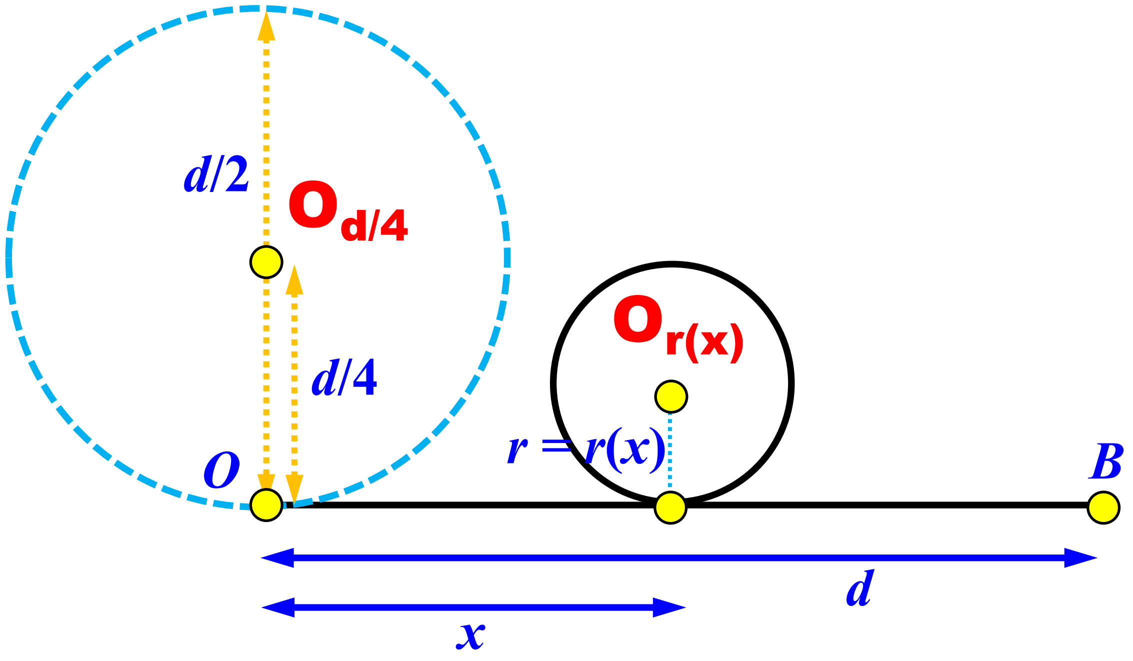
最大圓 O_r 的半徑為
$r = d/4$



- 因為對稱性，我們只討論右邊從 O 到 B 的部分
- 問題：若已知一段到 O 的距離 x，是否可以作出一個圓 O_r，使得它能夠和圓 O_a 以及圓 O_b 相切?
- 換言之，找出圓 O_r 的半徑 r，使得我們可以作出互切的圓 O_a 和圓 O_b，它們和直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 切於 A 和 B、也和圓 O_r 相切!
- 若能在每一個 x 值之下都能找出圓 O_r，這些圓的中心的軌跡為何?

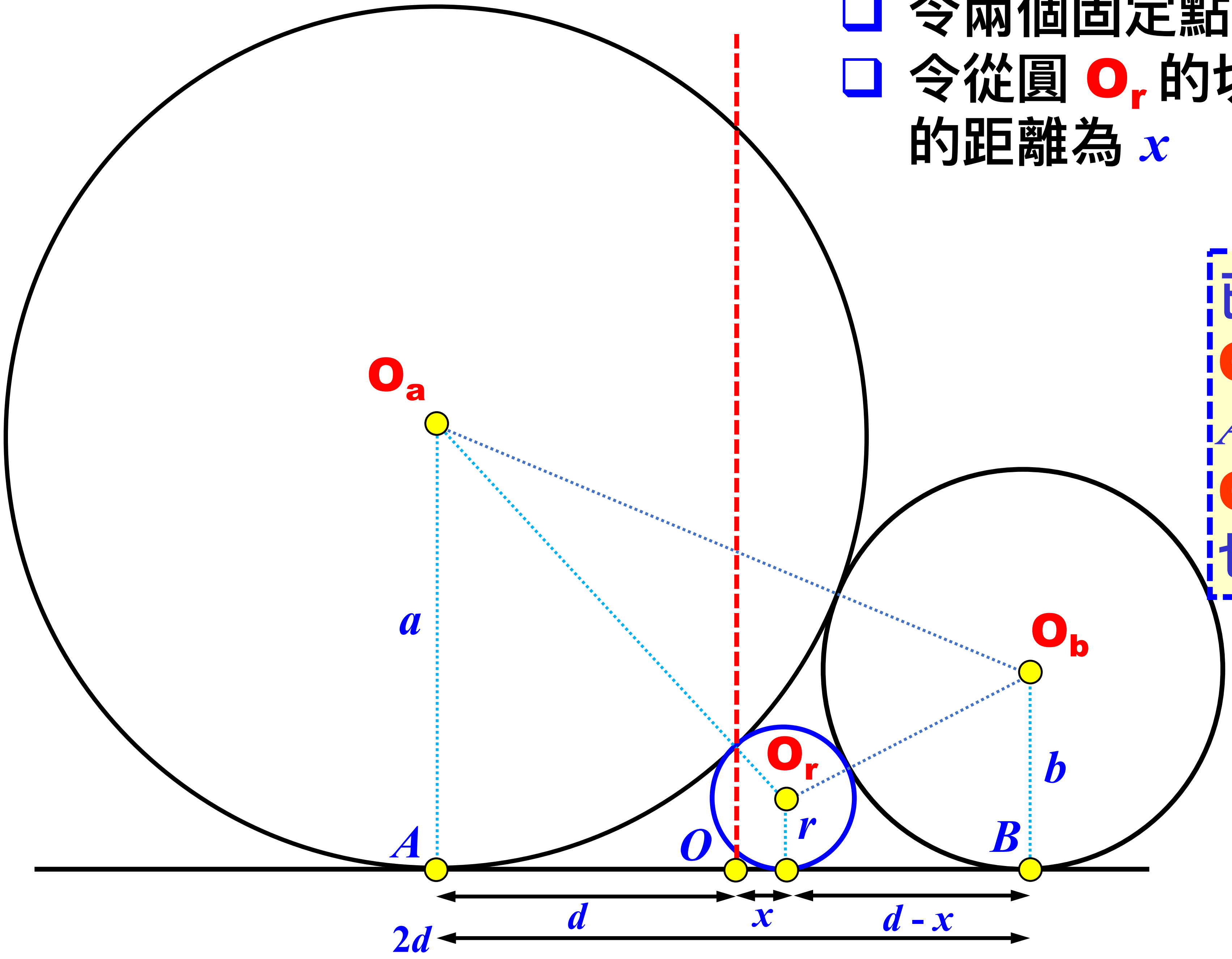
分析: 3/3

最大圓 O_r 的半徑為
$r = d/4$



- 我們會證明:
  - ✓ 所有作出的圓的中心在一條拋物線上
  - ✓ 所有的這些圓都和某一個共同的圓相切

- 令兩個固定點為 A 與 B 而且 $\overline{AB}=2d$
- 令從圓 O_r 的切點到線段 $\overline{AB}$ 中點 O 的距離為 x

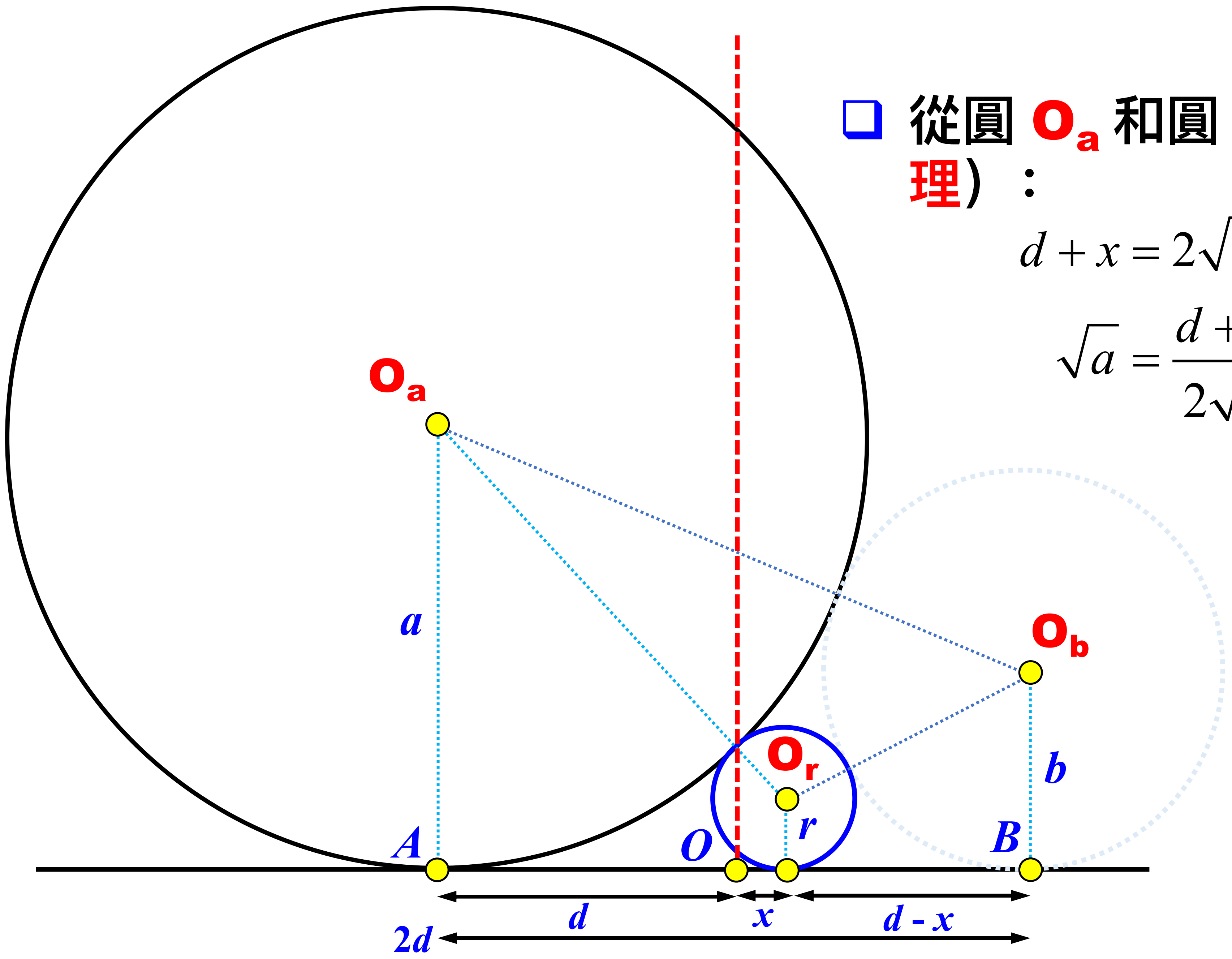


已知 x，找出 r 使得 O_a 和 O_b 與直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 在 A 和 B 相切，而且圓 O_a, O_b 和 O_r 兩兩相切、也和直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 相切

- 從圓 O_a 和圓 O_r 得到（預備定理）：

$$d + x = 2\sqrt{a \cdot r}$$

$$\sqrt{a} = \frac{d + x}{2\sqrt{r}}$$

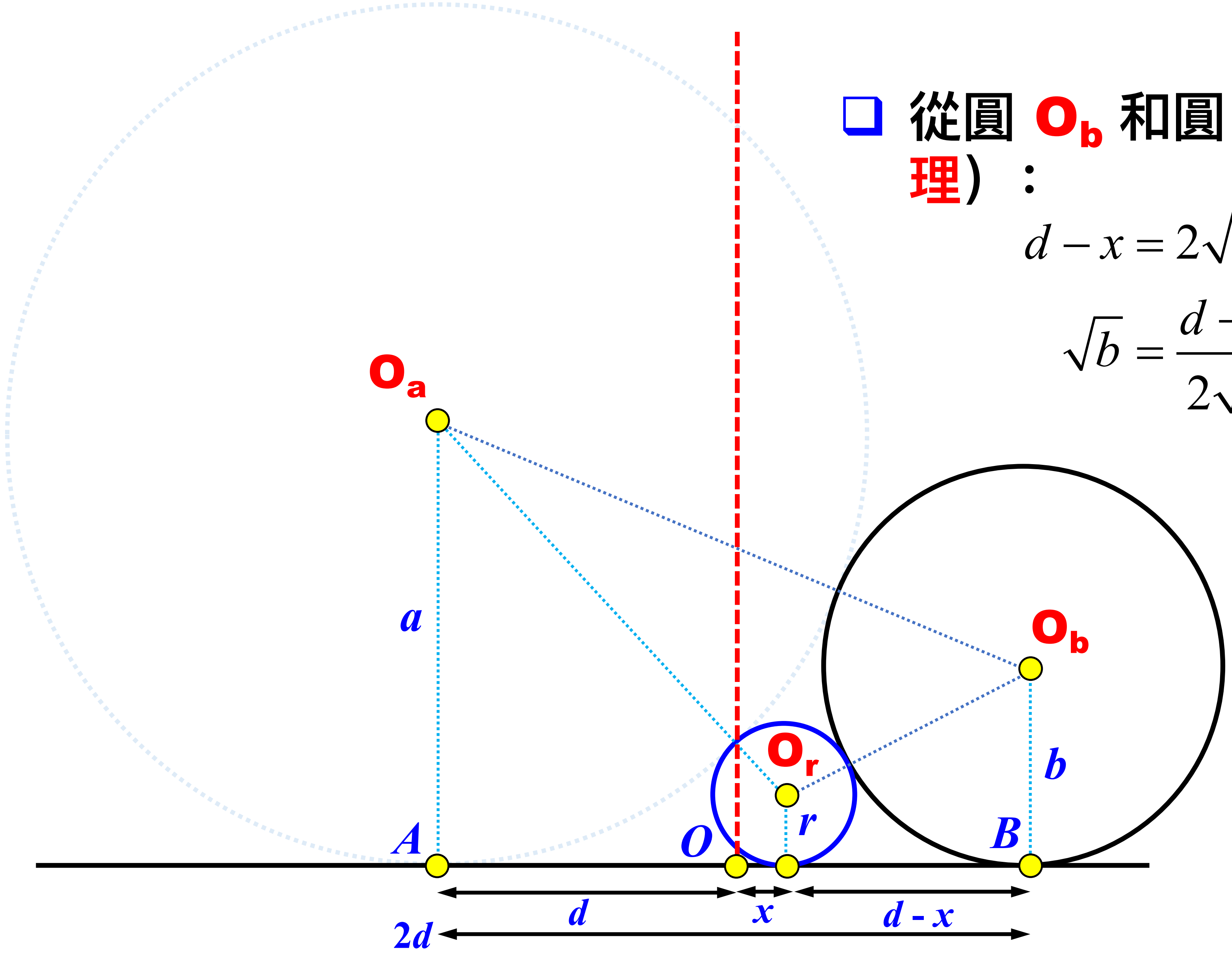


找出 a 使得圓 O_a 和圓 O_r 相切、而且圓 O_a 和直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 在 A 相切

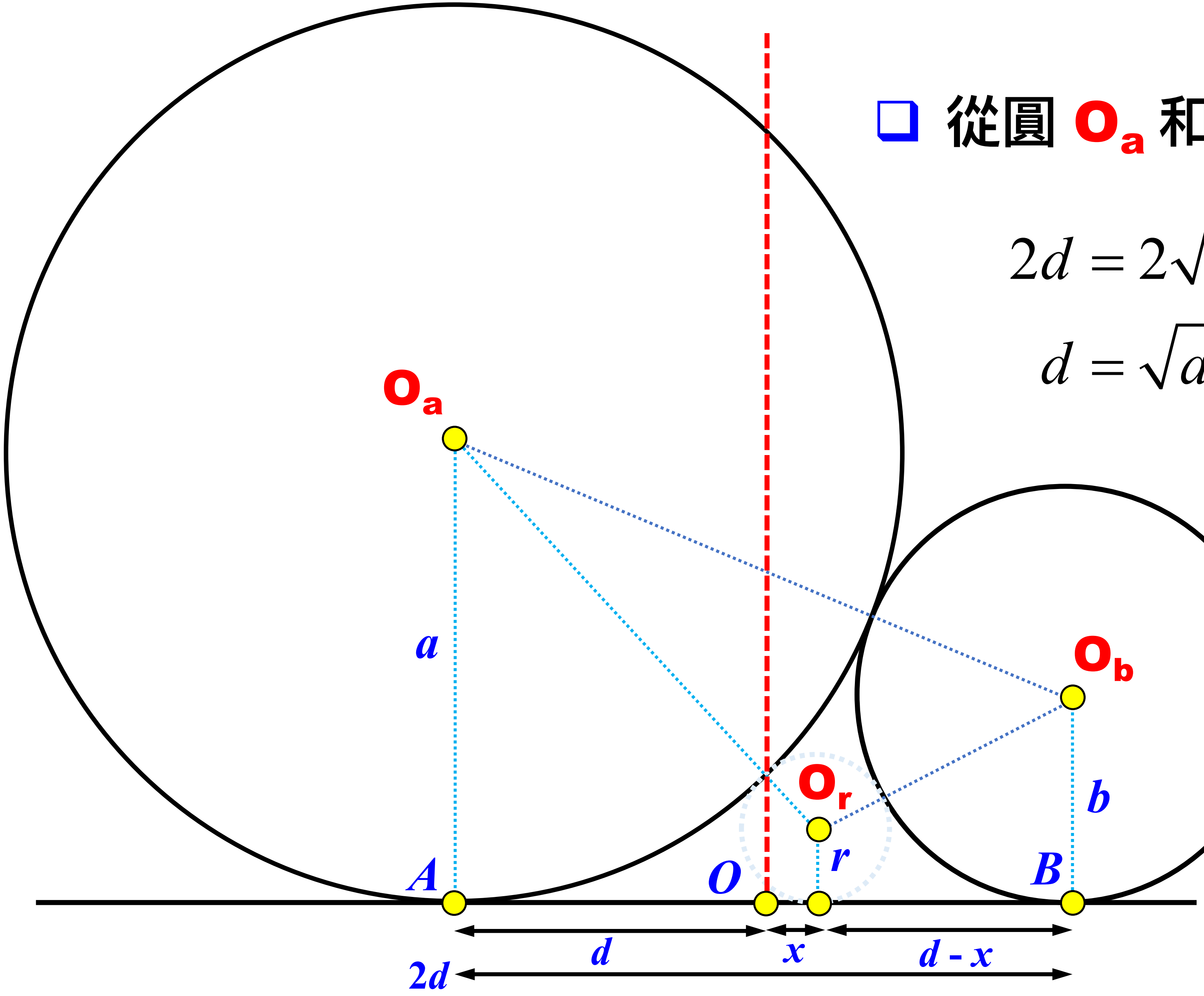
❑ 從圓 O_b 和圓 O_r 得到（預備定理）：

$$d-x=2\sqrt{b\cdot r}$$

$$\sqrt{b}=\frac{d-x}{2\sqrt{r}}$$



找出 b 使得圓 O_b 和圓 O_r 相切、而且圓 O_b 和直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 在 B 相切



❑ 從圓 O_a 和圓 O_b 得到:

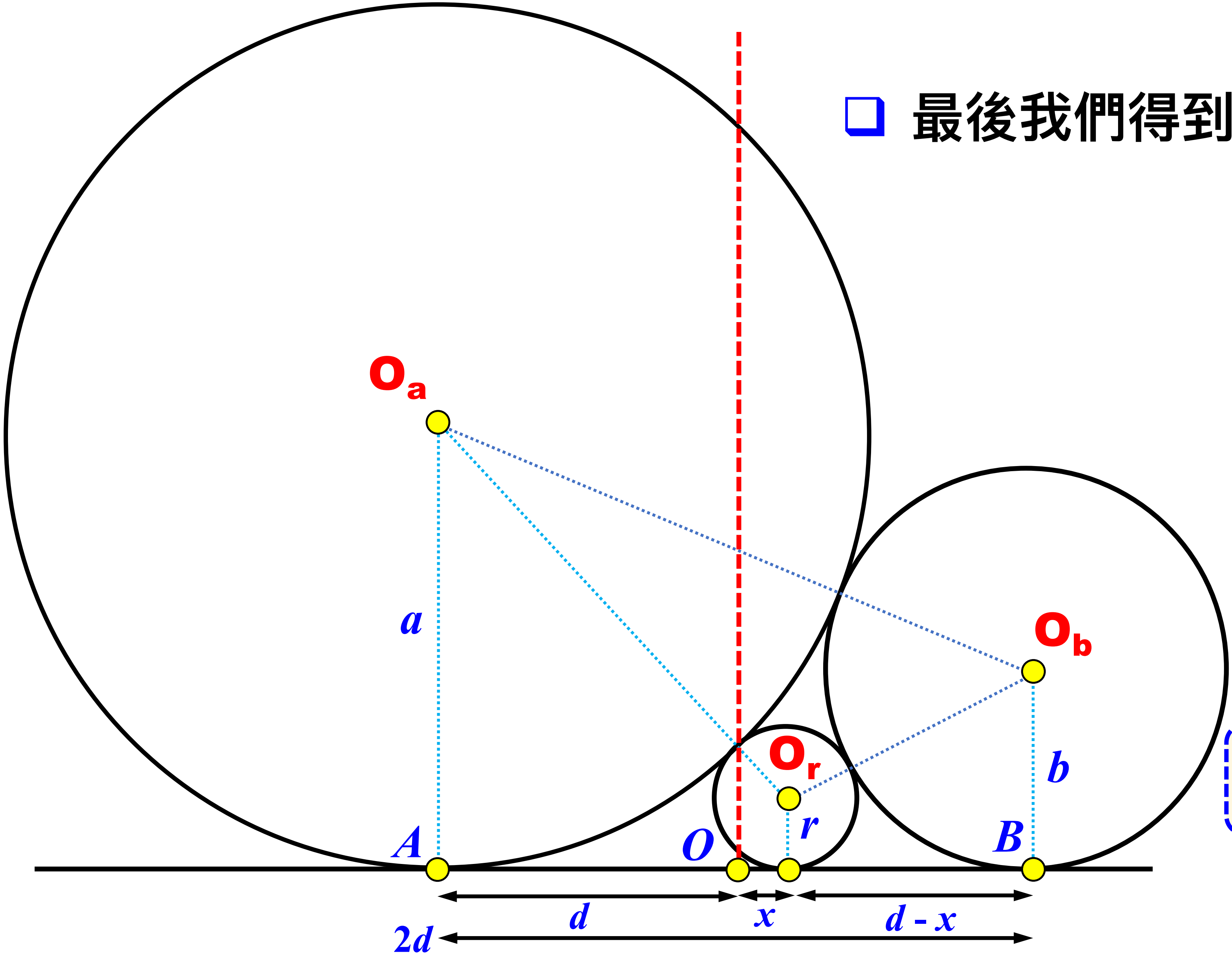
$$2d = 2\sqrt{a \cdot b}$$

$$d = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

我們前面得到

$$\sqrt{a} = \frac{d + x}{2\sqrt{r}}$$

$$\sqrt{b} = \frac{d - x}{2\sqrt{r}}$$



❑ 最後我們得到期望的結果：

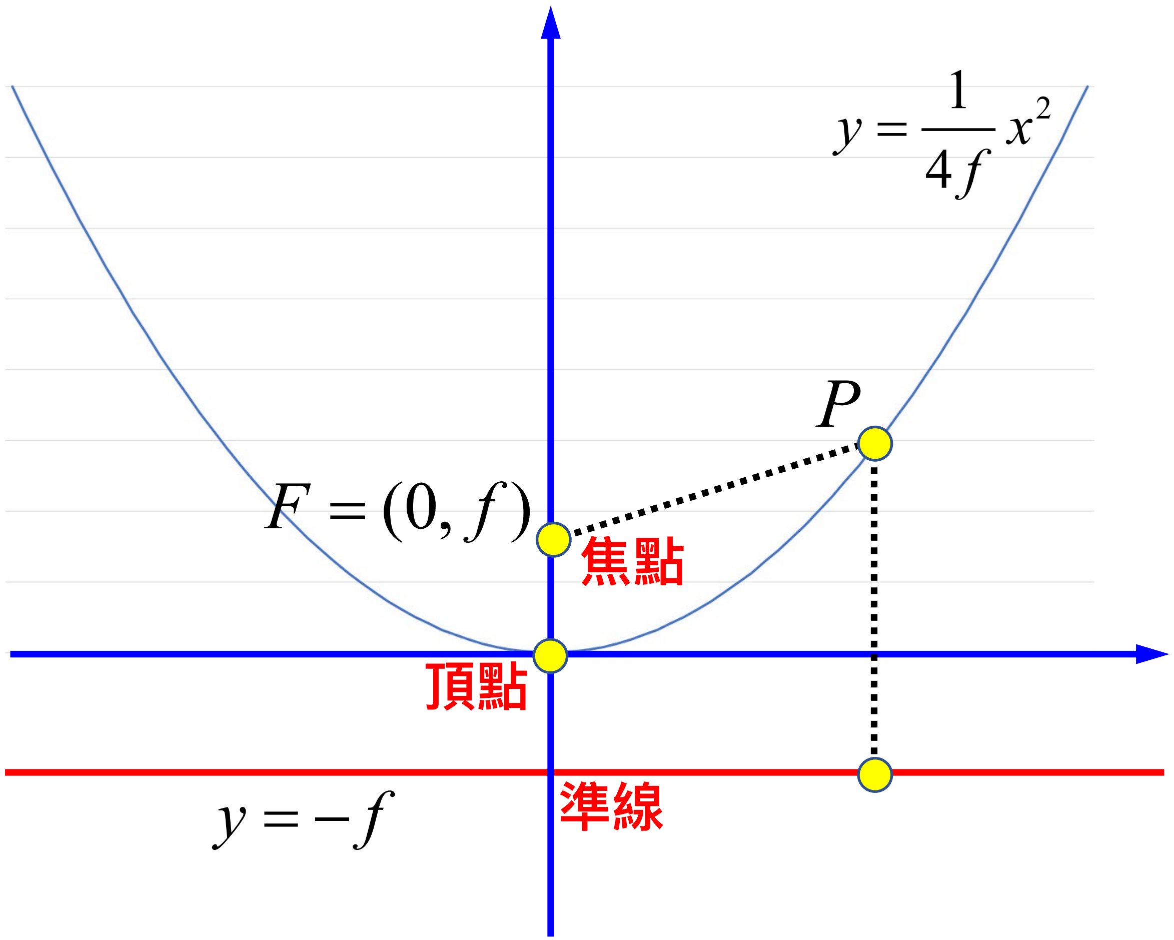
$$d=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$
$$=\left(\frac{d+x}{2\sqrt{r}}\right)\left(\frac{d-x}{2\sqrt{r}}\right)$$
$$=\frac{1}{4r}\left(d^2-x^2\right)$$

會在問題7使用此式

$$r=\frac{1}{4d}\left(d^2-x^2\right)$$

這就是期望的圓 O_r 的半徑 r，
使可以作出滿足條件的 O_a 、和O_b

複習拋物線

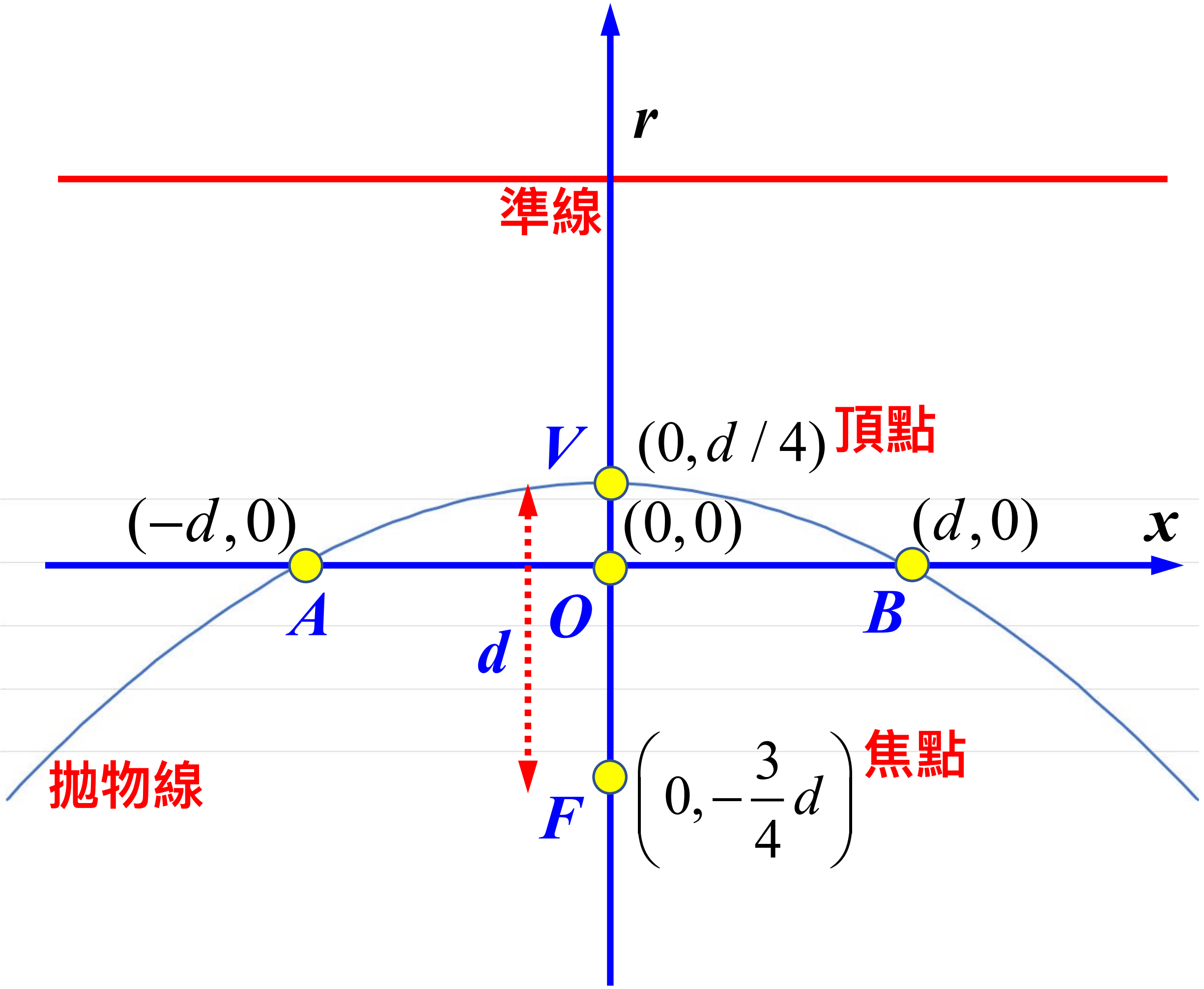


- 在直角座標下，拋物線的方程式是

$$y=\frac{1}{4f}x^2$$

- ✓ $F=(0,f)$ 這個點是焦點 (focus)
- ✓ $y=-f$ 這條線是準線 (directrix)
- ✓ (0,0) 是頂點 (vertex)
- ✓ 若 $f>0$ （或 $f<0$ ），開口向上（或向下）
- ✓ 從拋物線上任一點 P 到準線的距離和到焦點的距離相等

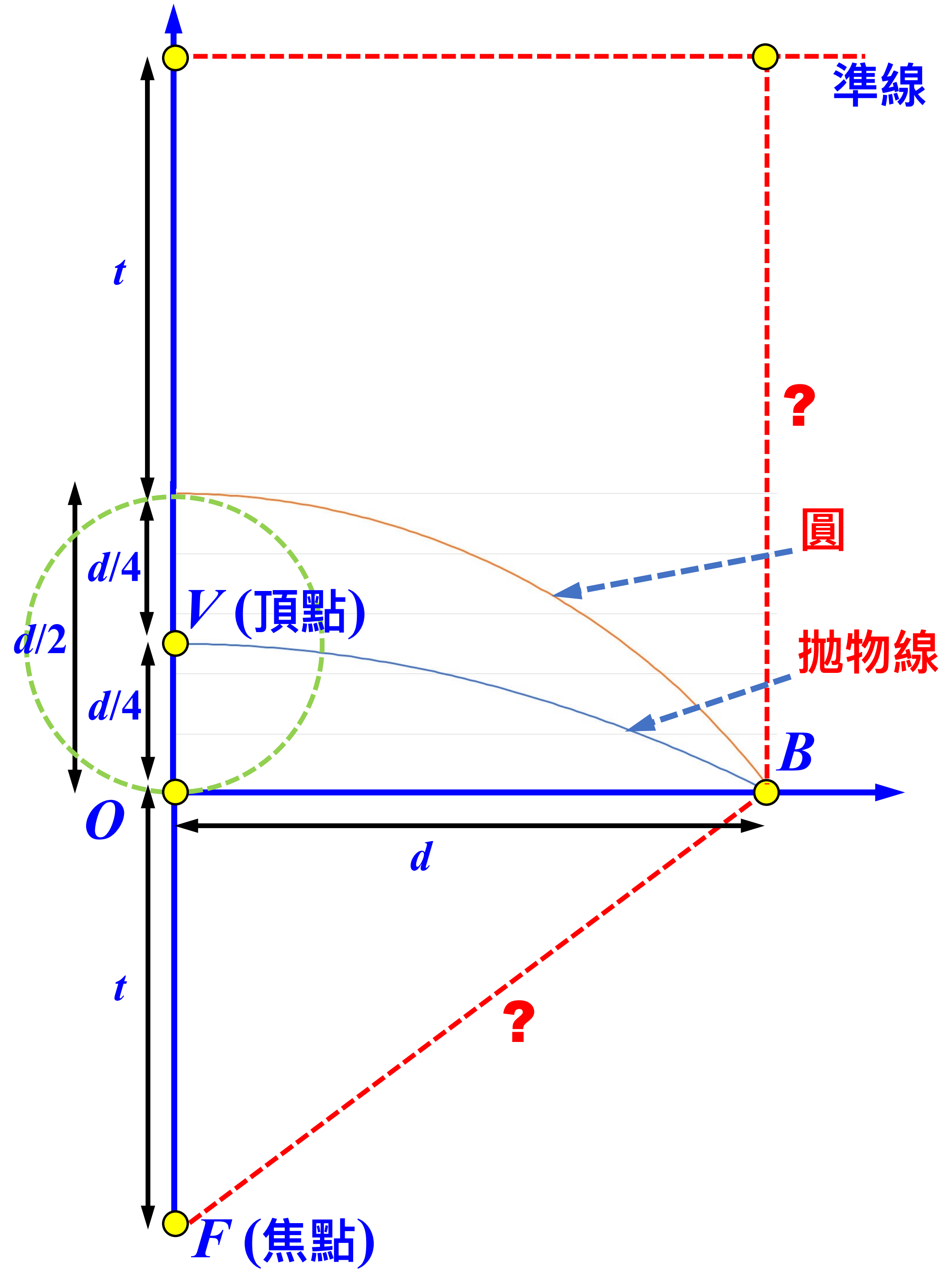
複習拋物線



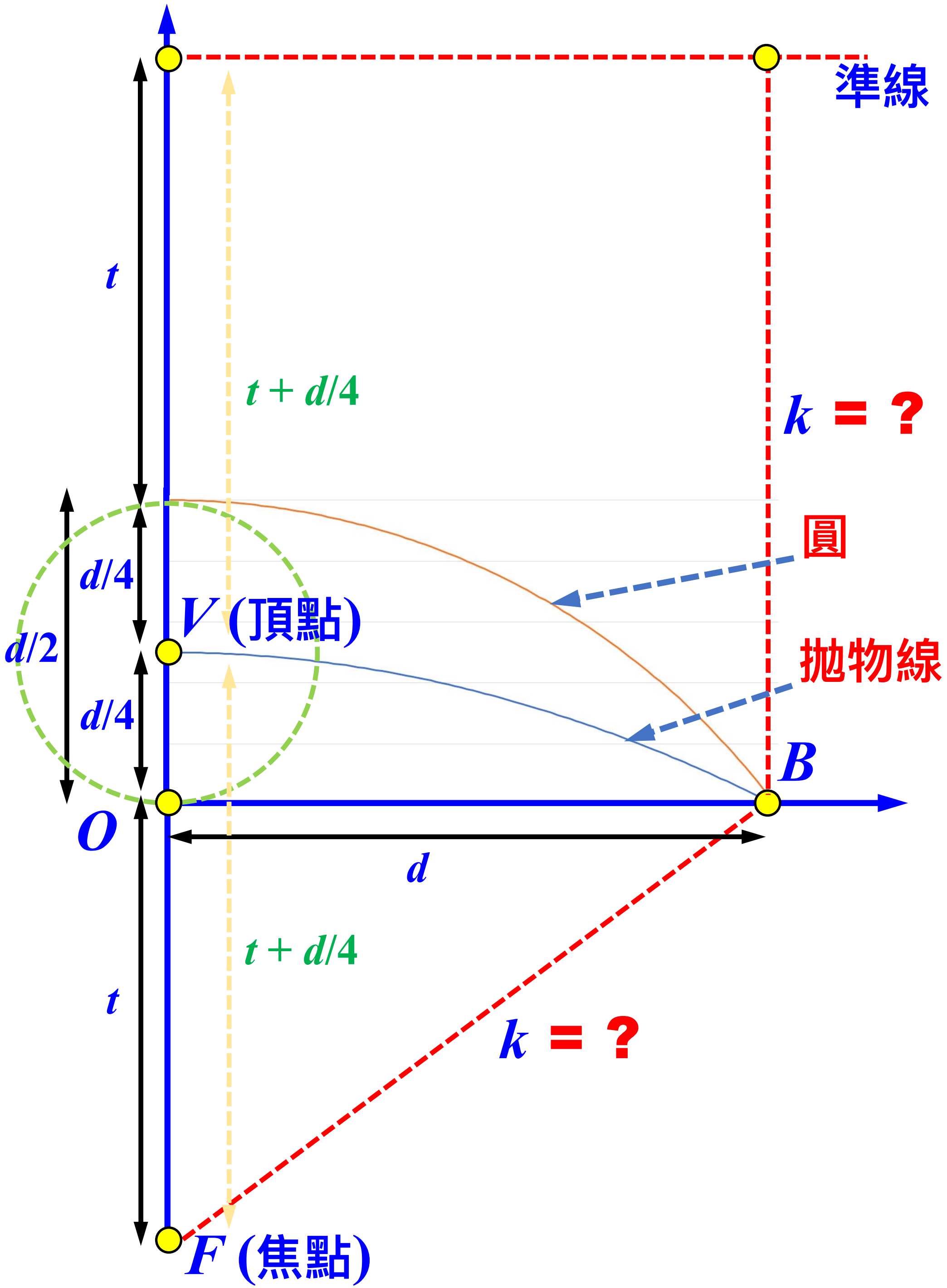
- 前面得到如下的方程式

$$r = \frac{1}{4d}\left(d^2 - x^2\right)$$

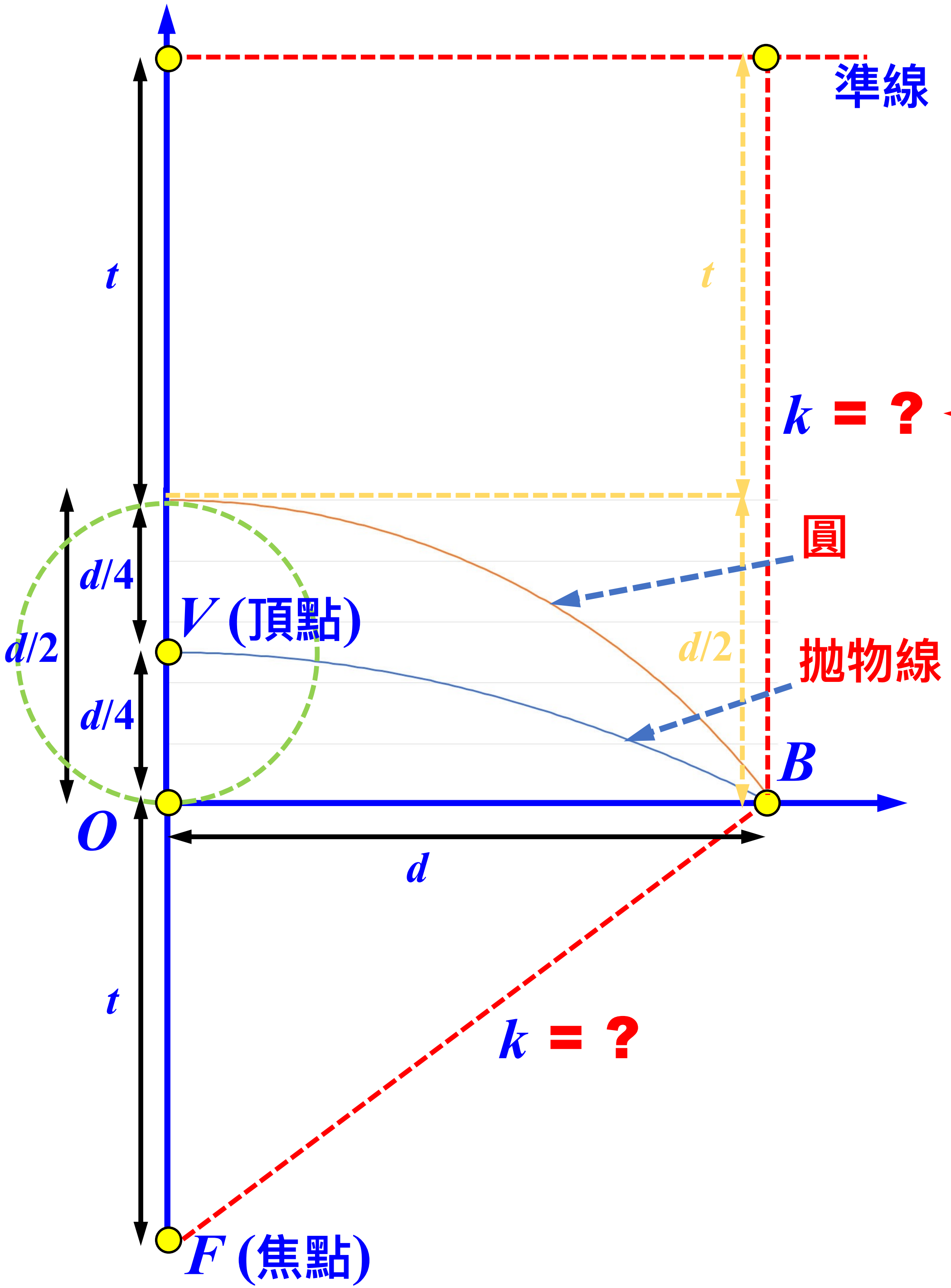
- 若橫軸是上式的 x 、縱軸是 r
- 這個拋物線的開口向下、和橫軸在 $(\pm d, 0)$ 相交、和縱軸在 $(0,d/4)$ 相交
- 若把拋座標縱向平移 $-d/4$ ，方程式就變成 $r = -x^2/(4d)$
- 所以，**焦長**（*focal length*，從**焦點**到**頂點**的距離）就是 d ！



- 讓我們不用座標找出焦點、頂點和準線
- 我們知道圓的中心的軌跡會通過 B（圓 O_r 的半徑為 0）、也會經過 V（圓 O_r 的最大半徑是 $d/4$）。
- 這個拋物線的焦點和準線何在？
- 假設焦點是 F。從頂點 V 到 F 的距離和從頂點到準線相等



- 假設從 O 到焦點 F 的（未知）距離為 t （見左圖）
- 於是，從頂點 V 到焦點 F 的距雖是 $t + d/4$
- 當然，從頂點 V 到準線的距離也是 $t + d/4$
- 由此而得從直線 $\overleftrightarrow{OB}$ 到準線的距離是 $(t+d/4)+d/4=t+d/2$
- 因為 B 在拋物線上，從焦點 F 到 B 的距離等於從 B 到準線的距離 $t+d/2$
- 剩下來就是如何找出 t 從而算出 k



- 因為 ΔFOB 是個直角三角形，我們有

$$k^2 = t^2 + d^2$$

- 因為 $k = t + d/2$，上式變成

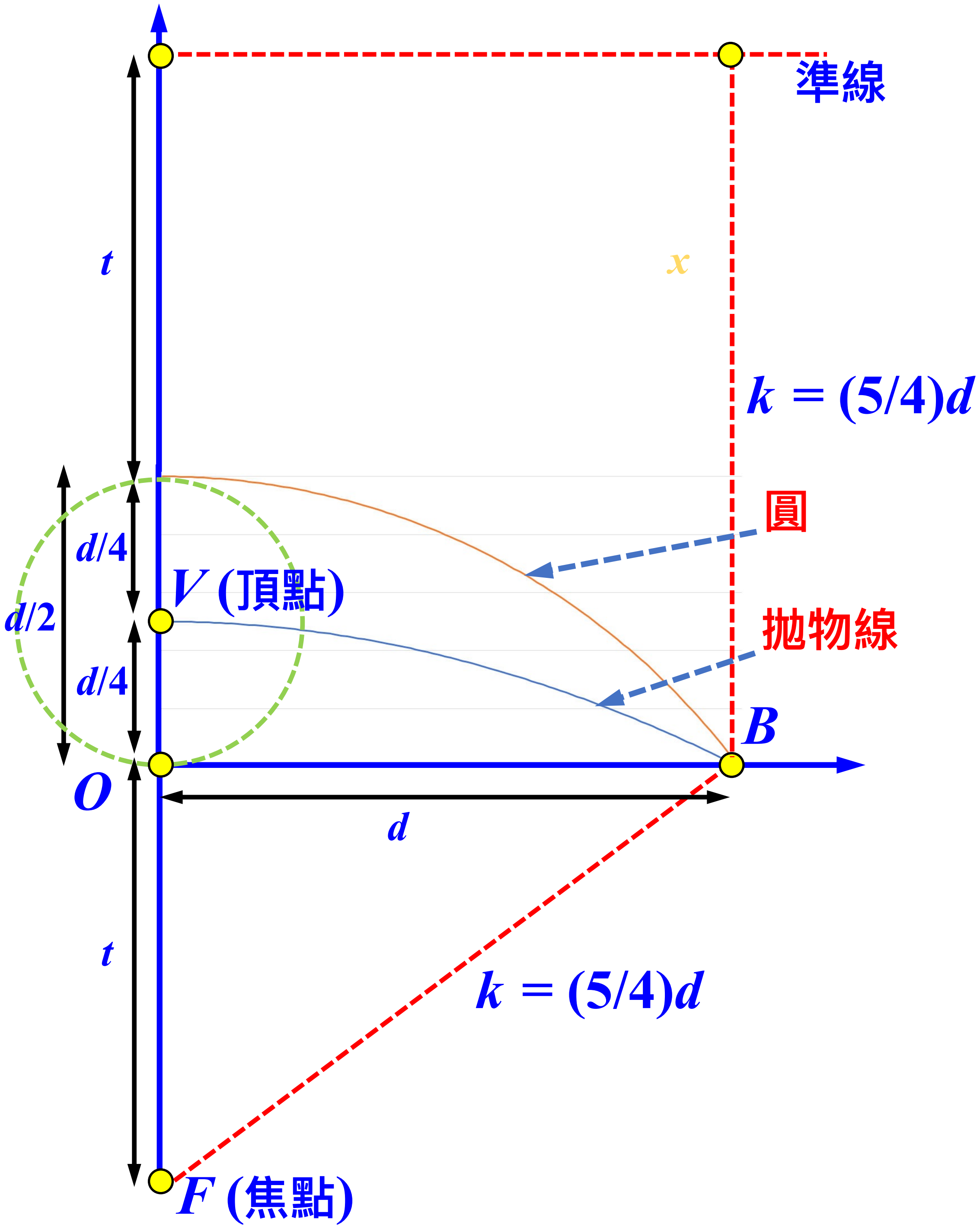
$$\left(t + \frac{d}{2}\right)^2 = t^2 + d^2$$

$$\boxed{t^2} + td + \frac{d^2}{4} = \boxed{t^2} + d^2$$

$$td = \frac{3}{4}d^2$$

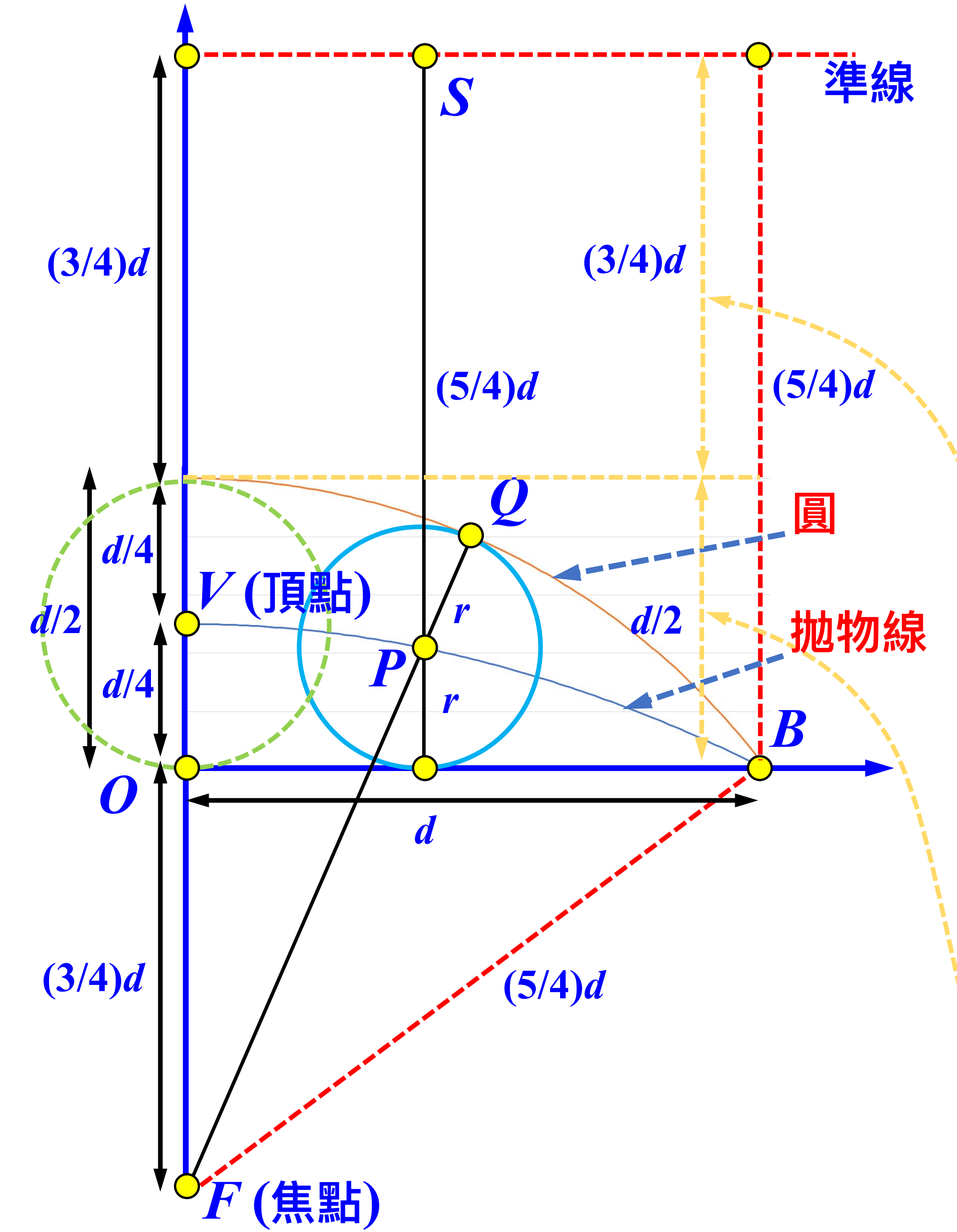
$$t = \frac{3}{4}d$$

這就是我們要的結果 $\boxed{k = t + \frac{d}{2} = \frac{3}{4}d + \frac{d}{2} = \frac{5}{4}d}$



這是到目前為止的結果

- 圓 O_r 的圓心在一條拋物線上，並且具有下列特性:
  - ✓ 頂點為 V，這是最大的圓 O_r 的圓心所在
  - ✓ 焦點為 F，它到頂點 V 的距離為 $(5/4)d$
  - ✓ 準線是一條和直線 $\overleftrightarrow{VF}$ 垂直、並且到頂點 V 的距離為 $(5/4)d$ 的直線

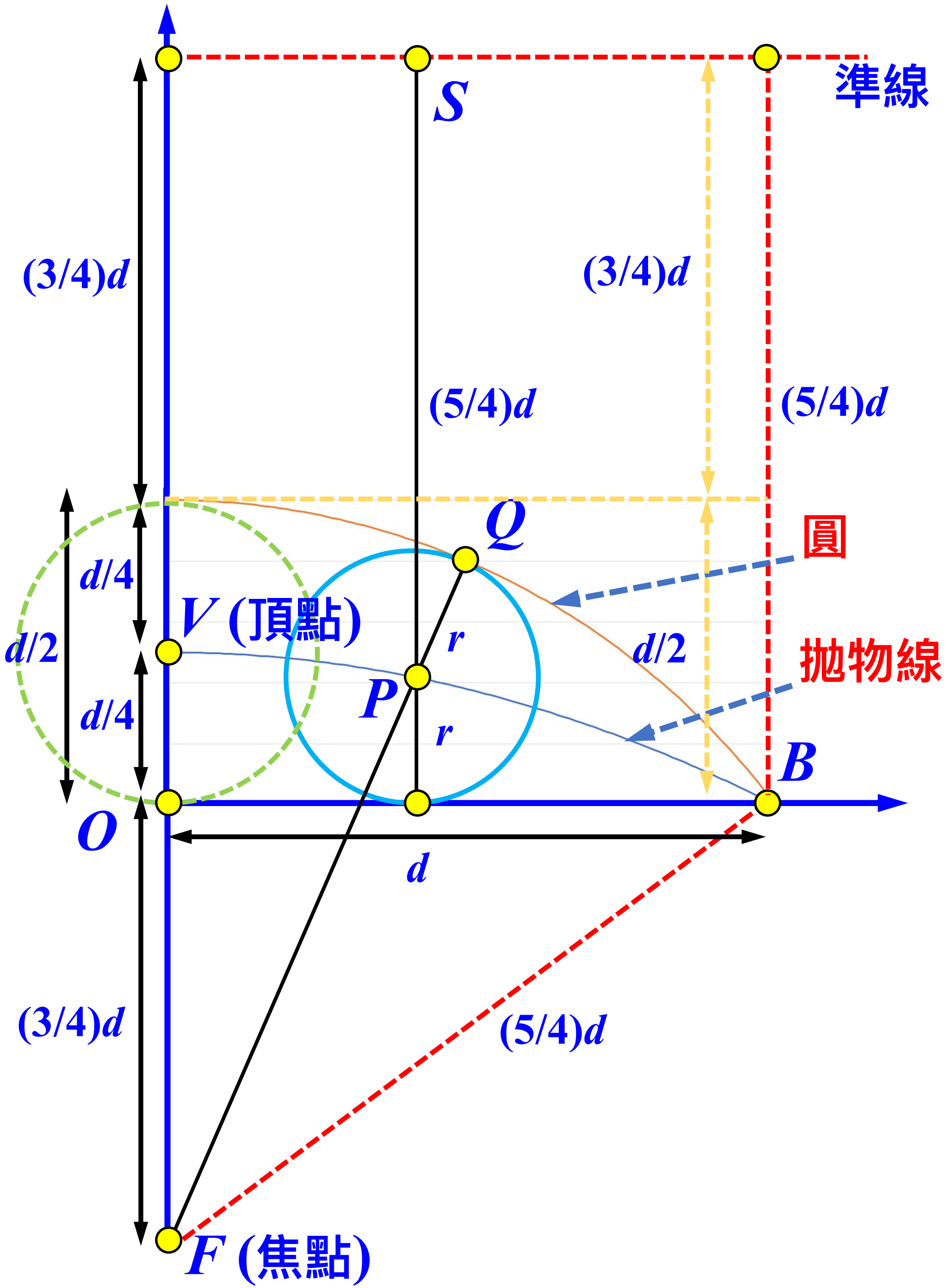


- 考慮一個圓 O_r，它的中心 P 在拋物線上並且和直線 $\overleftrightarrow{OB}$ 相切
- 假設直線 $\overleftrightarrow{FP}$ 和圓 O_r 在 Q 相交（見左圖）
- 因為 P 在拋物線上，我們有 $\overline{FP}=\overline{PS}$，此地 S 是從 P 到準線的垂足。因此我們有：

$$\overline{FQ} = \boxed{\overline{FP}} + \overline{PQ} = \boxed{\overline{PS}} + r$$

= 直線 $\overleftrightarrow{OB}$ 和準線之間的距離

$$= \boxed{\frac{3}{4}d} + \boxed{\frac{1}{2}d} = \frac{5}{4}d =$$ 常數

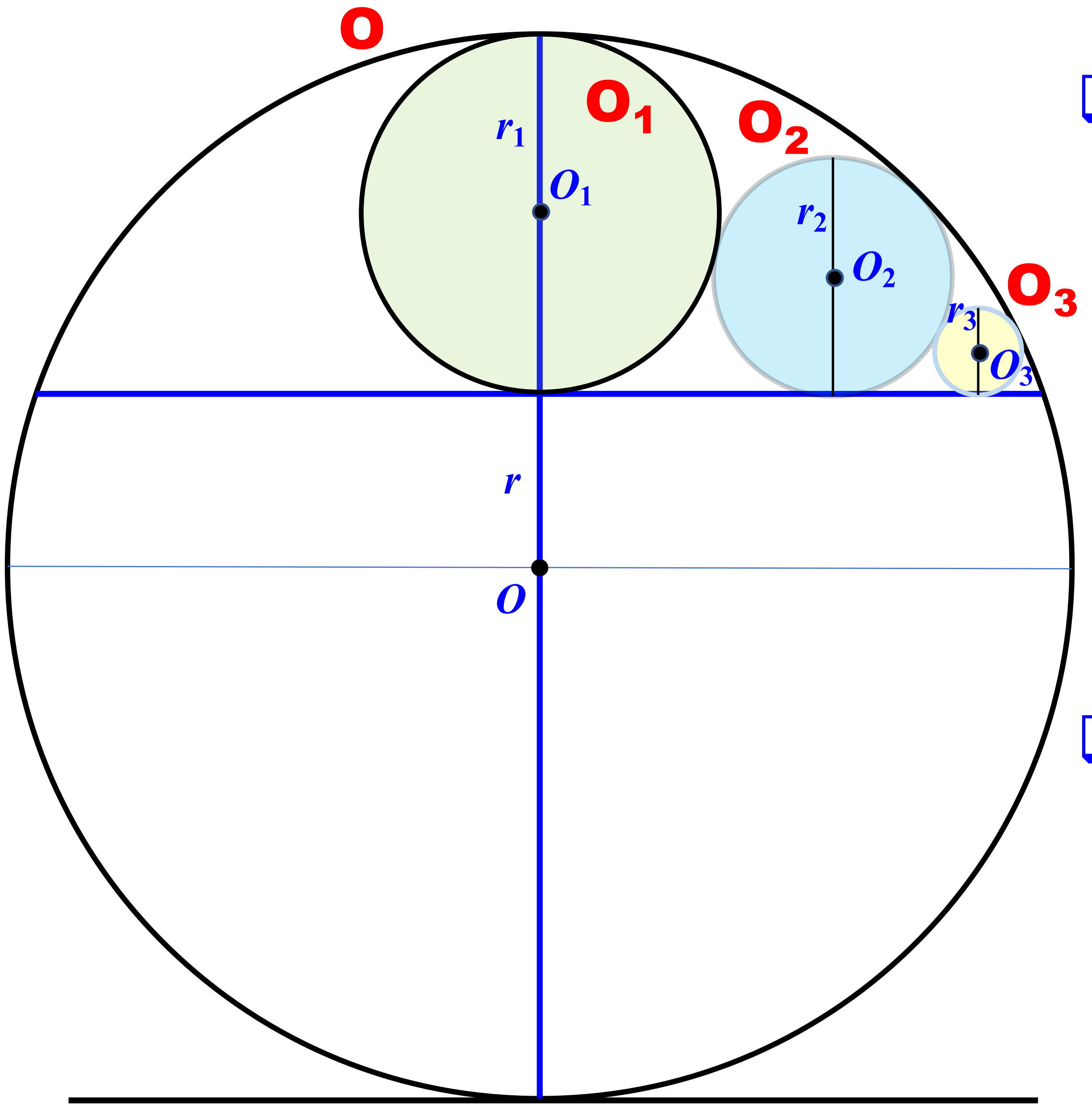


$\overline{FQ}=$ 常數 $=\frac{5}{4}d$ 意義何在?

- 它是說 Q 在以中心為 F 半徑為 $(5/4)d$ 的一個圓上!
- 這也表示圓 O_r 和上述的圓在 Q 相切
- 已知兩個點 A 和 B，任意一組互切並且和直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 在 A 和 B 相切的圓 O_a 和圓 O_b 都唯一地決定了一個和圓 O_a 和圓 O_b 互切並且和直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 相切的圓 O_r。圓 O_r 的中心在一條抛物線上，而且所有的圓 O_r 都和一個固定的圓相切，這個定圓經過 A 和 B、而且圓心在抛物線的焦點。

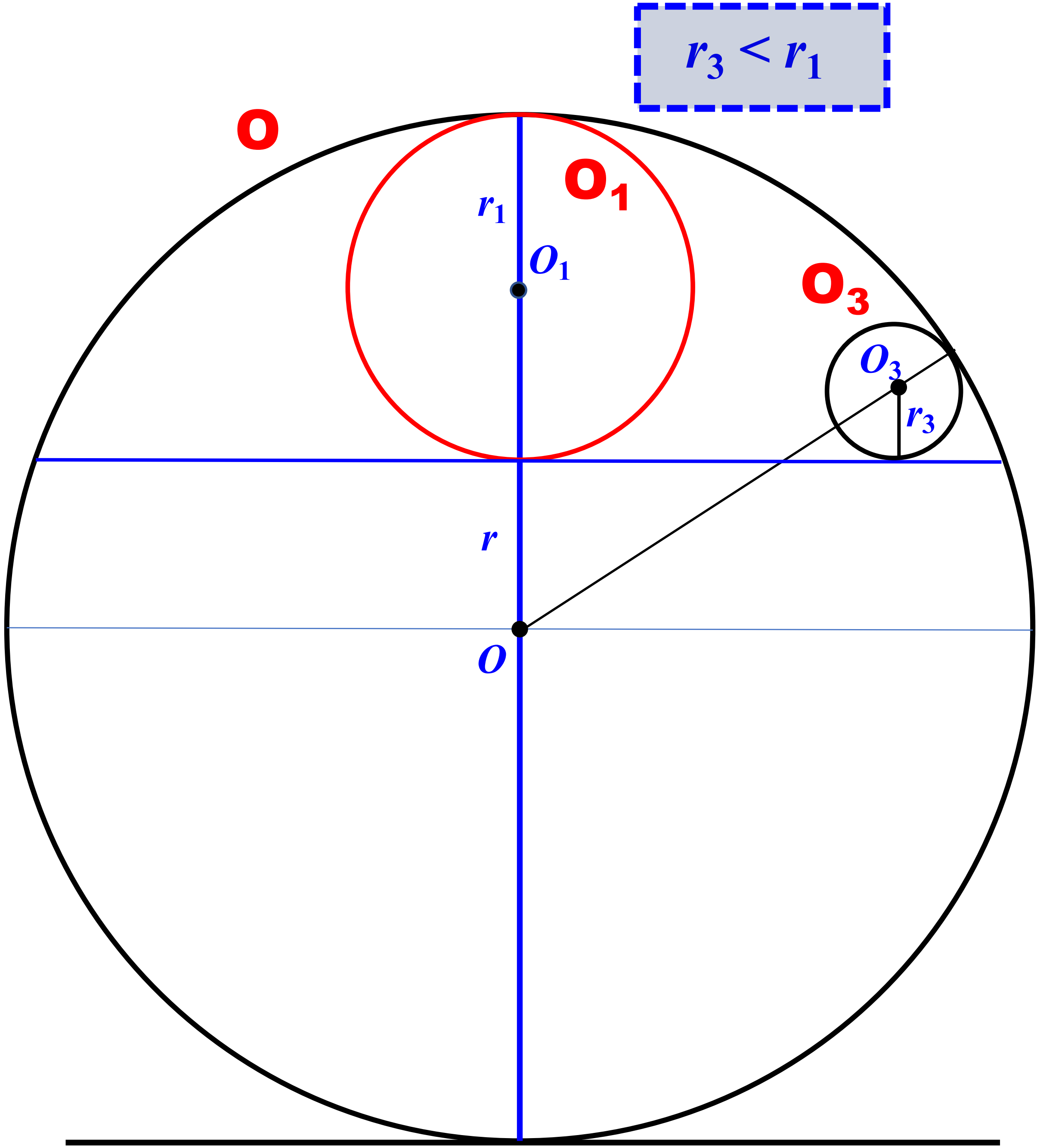
問題6

問題3的一個變形



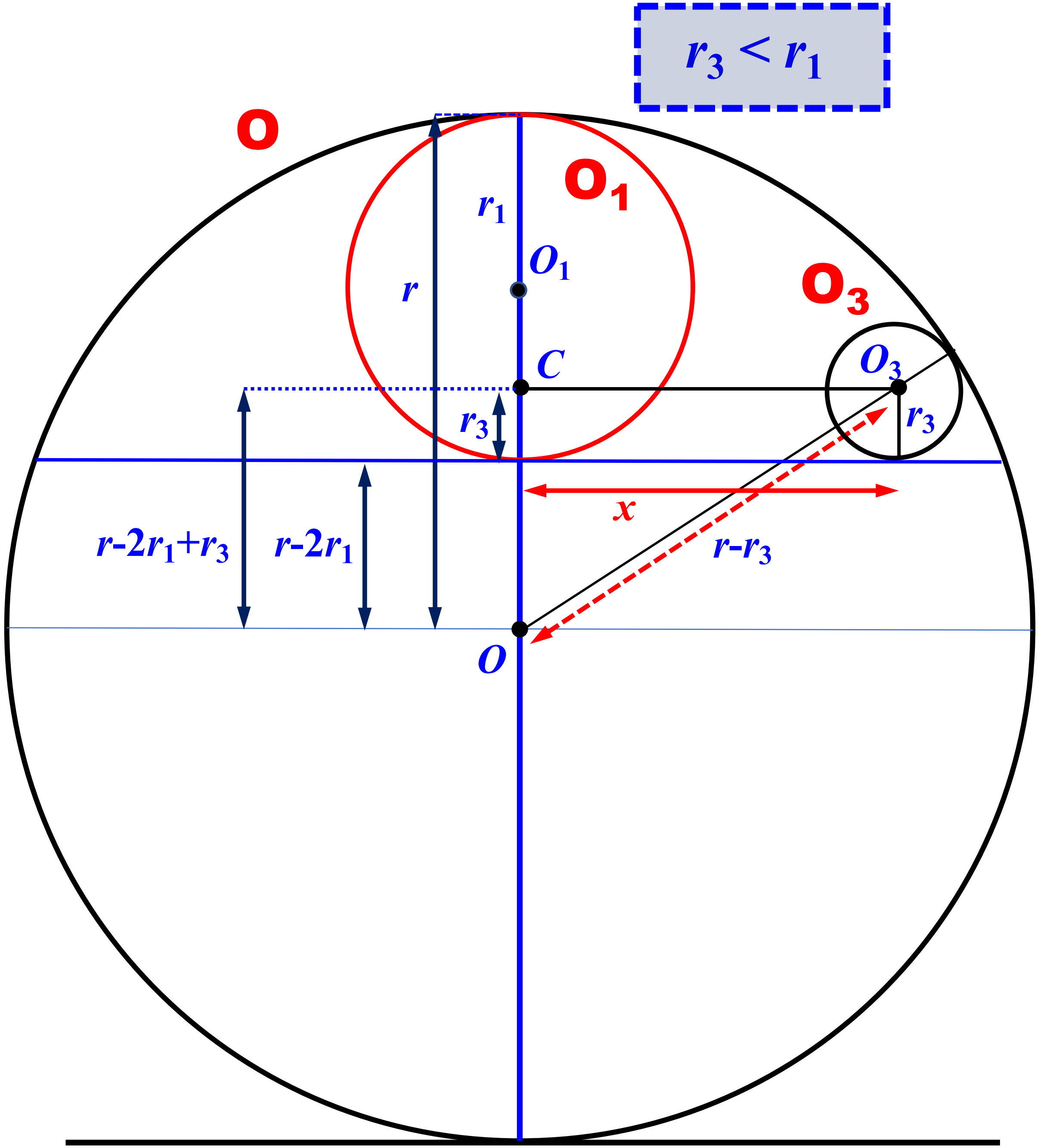
問題3

- 從圓 O 和另一個和圓O相切以及在弦的中點相切的圓 O_1，可以作出一個和圓 O 、圓 O_1 以及弦相切的圓 O_2，從圓 O_2 又可以作出第三個圓 O_3 使得
  - ✓ O_1, O_2 和 O_3 都和圓 O與弦相切
  - ✓ 圓 O_2 和圓 O_1 與圓 O_3 外切
- 於是，圓 O 的半徑 r 可以用圓 O_1 和圓 O_3 的半徑算出來。



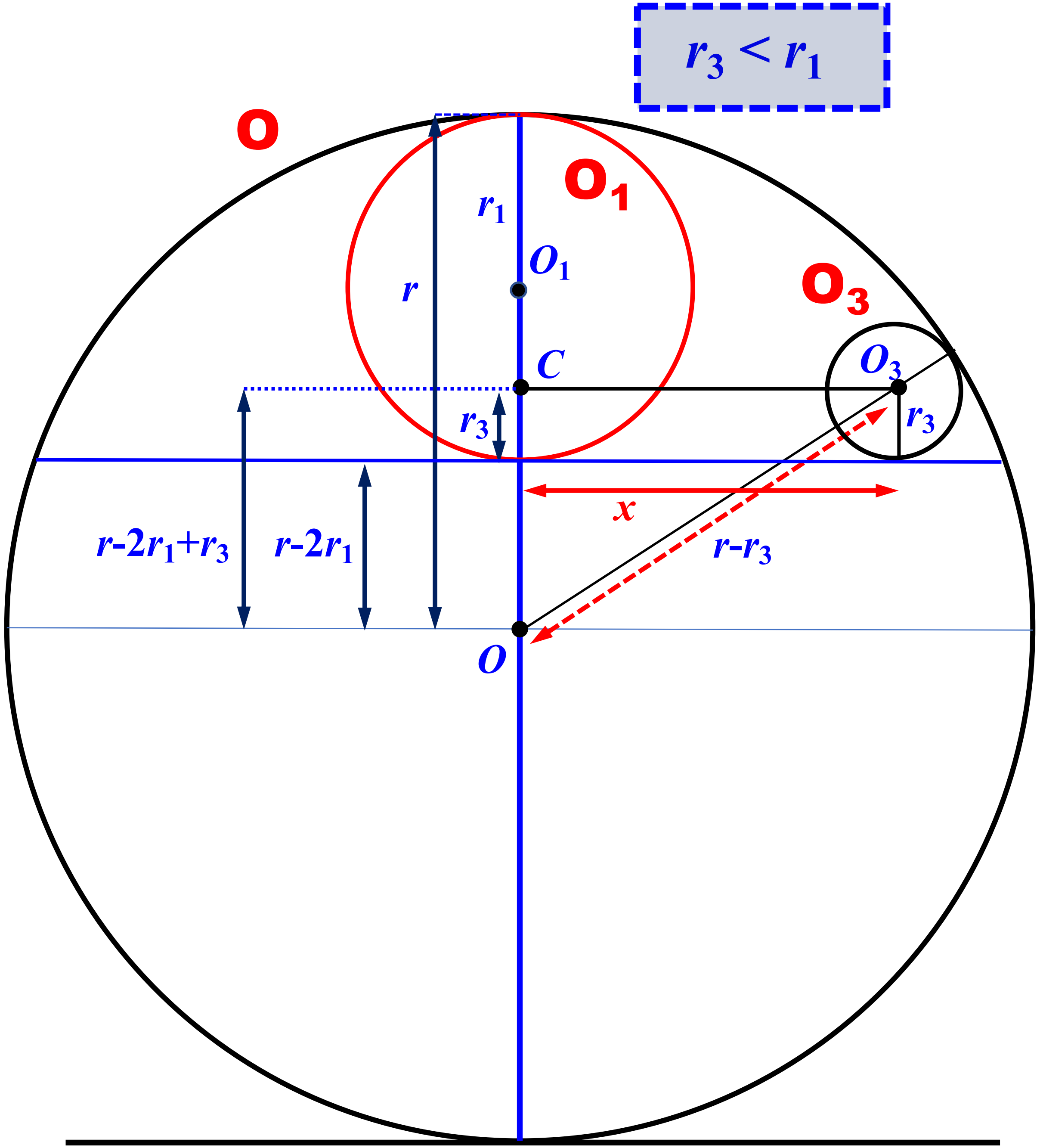
問題

- 如果不用圓 O_2 就可以算出圓 O 的半徑，那麼給定任何的圓 O_3，我們仍然有類似的結果嗎?
- 答案是肯定的，而且使用的技巧還很類似
- 我們會用半徑 r_1 和 r_3 表示半徑 r
- 然後圓心 O 就可以定出來了
- 回想一下：那些和圓 O 以及弦相切的圓 O_n 的圓心在一條拋物線上
- 這條拋物線的頂點和焦點分別在 O_1 和 O



使用到的符號

- 令圓 **O** 的圓心和半徑為 O 和 r
- 令和 **O** 與弦在它的中點相切的圓為 **O_1**、圓 **O_1** 的圓心和半徑分別是 O_1 和 r_1
- 另一個和圓 **O** 以及弦相切的圓為 **O_3**，圓心和半徑分別是 O_3 和 r_3
- 圓 **O_1** 和圓 **O_3** 為已知，圓 **O** 的圓心 O 和半徑 r 則由圓 **O_1** 和圓 **O_3** 算出
- 從 O_3 向直線 $\overleftrightarrow{OO_1}$ 作垂線，令垂足為 C
- 用 x 表示從 O_3 到 C 的距離



証明: 1/2

- 因為 ΔOCO_3 是直角三角形，所以

$$\overline{OO_3}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CO_3}^2$$

- 我們又有

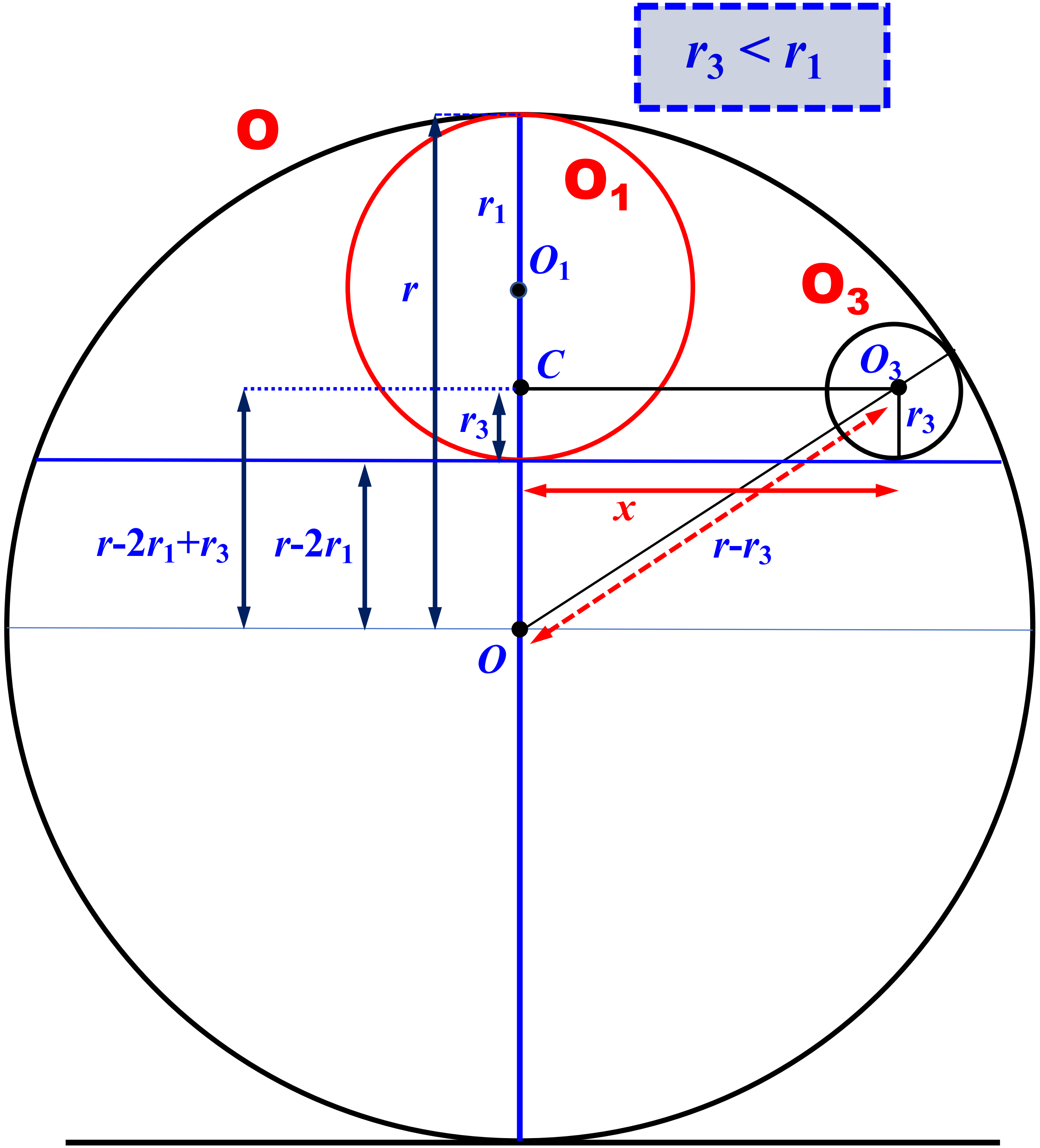
$$\overline{OO_3} = r - r_3$$

$$\overline{OC} = (r - 2r_1) + r_3$$

$$\overline{CO_3} = x$$

- 所以結果是

$$\boxed{(r - r_3)^2 = (r - 2r_1 + r_3)^2 + x^2}$$



証明: 2/2

- 我們做幾步簡單的計算

$$x^2 = (r-r_3)^2 - (r-2r_1+r_3)^2$$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$= \left[(r-r_3)-(r-2r_1+r_3)\right]\cdot\left[(r-r_3)+(r-2r_1+r_3)\right]$$

$$= \left[2(r_1-r_3)\right]\cdot\left[2(r-r_1)\right]$$

$$= \boxed{4(r_1-r_3)(r-r_1)}$$

問題7會用到這個結果

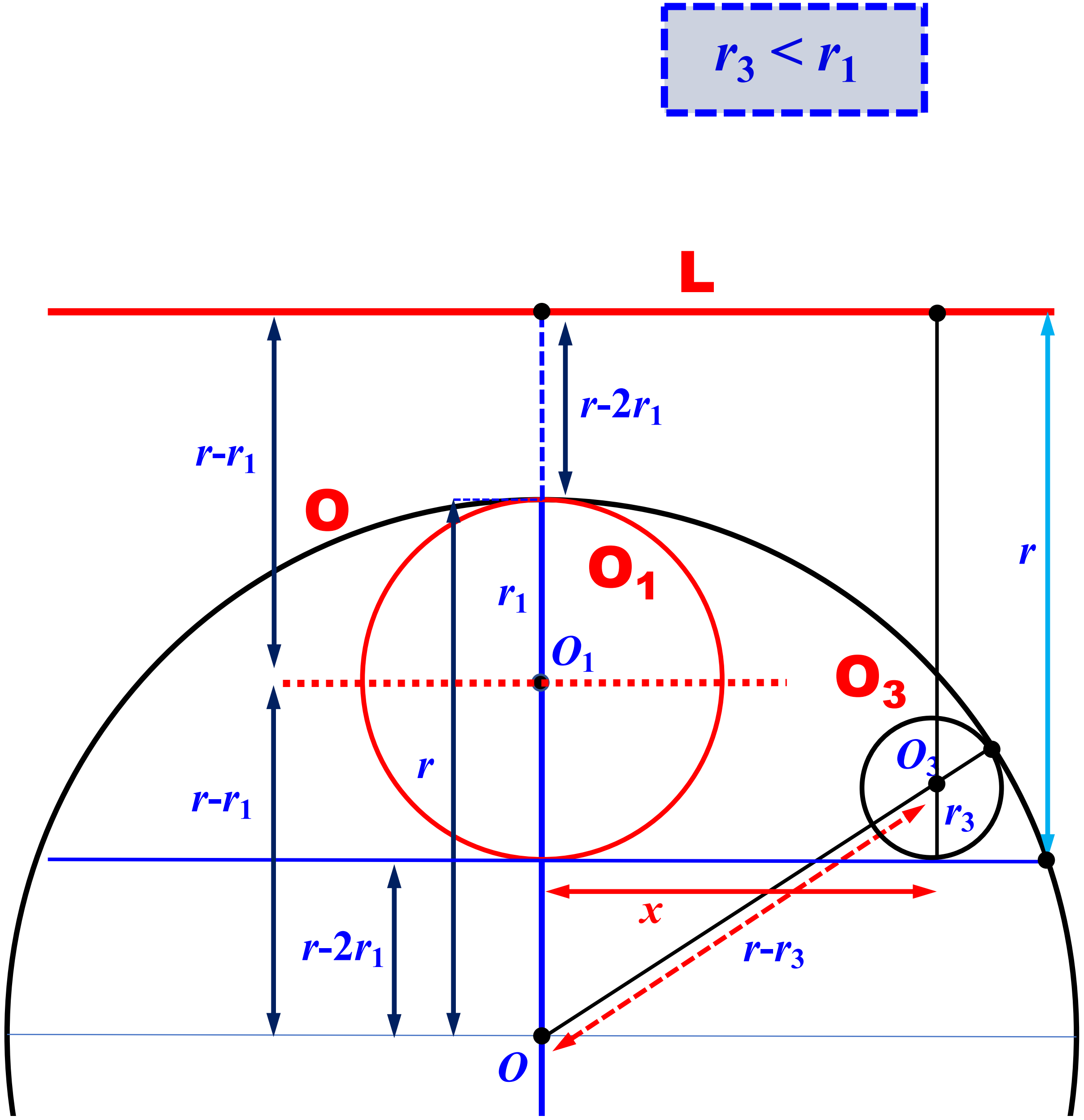
- 所以半徑 是:

$$r = \frac{1}{4(r_1-r_3)}x^2 + r_1$$

- 圓心 O 是在和弦上的切點相距 r-2r_1 的一點:

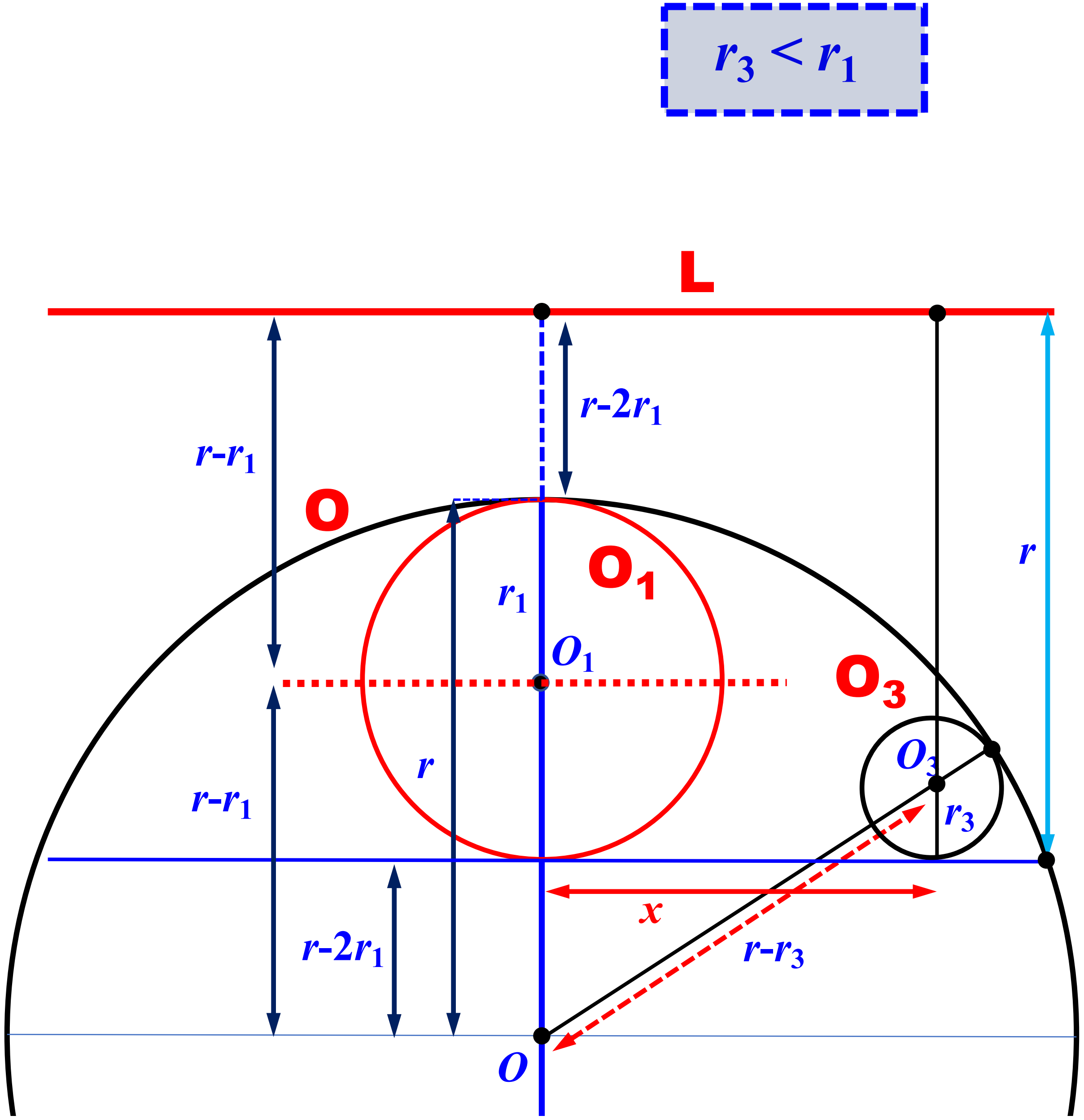
$$r-2r_1 = \left[\frac{1}{4(r_1-r_3)}x^2 + r_1\right] - 2r_1$$

$$= \frac{1}{4(r_1-r_3)}x^2 - r_1$$



拋物線: 1/2

- 前面講過：和圓 **O** 與弦相切的圓的圓心軌跡是一條拋物線
- 這事實仍然成立，縱使是 **O3** 是個任意圓（假設 $r_3 < r_1$ 成立）
- 令 **L** 是一條和弦平行、距離為 r 的直線，於是從 **L** 到已知圓 **O** 的北極的距離就是 r-$2r_1$
- 這樣，我們有從 O_3 到 **L** 的距離和從 O_3 到 O 的距離相等的結果（都是 r-r_3）

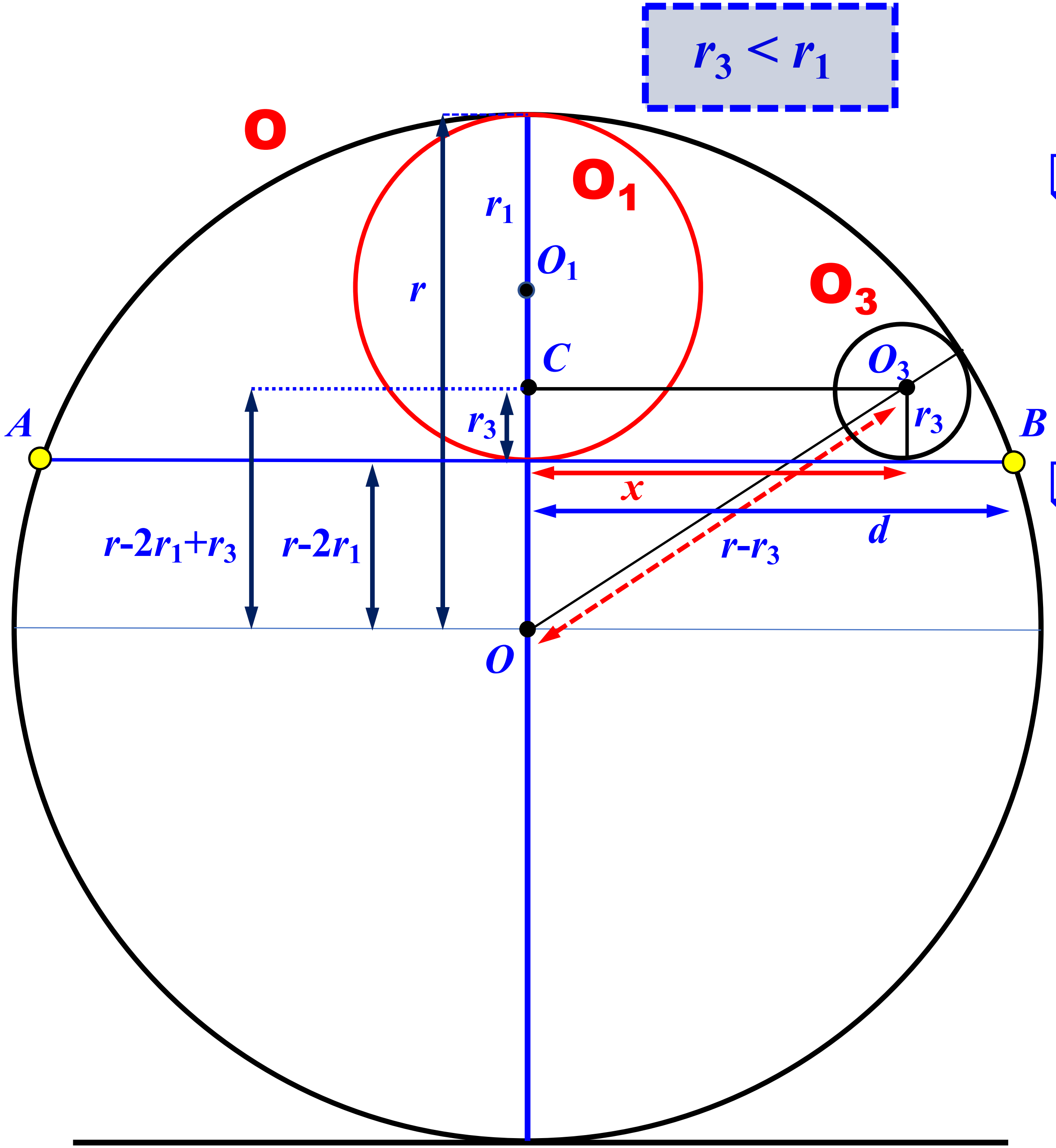


拋物線: 2/2

- 因為 O_3 是個（和 O 以及弦相切的）**任意的圓**，又因為從 O_3 到直線 L 的距離和從 O_3 到 O 的距離相等，於是 O_3 在一條拋物線上
- 這條拋物線的**頂點**、**焦點**和**準線**分別是 O_1，O 和 L

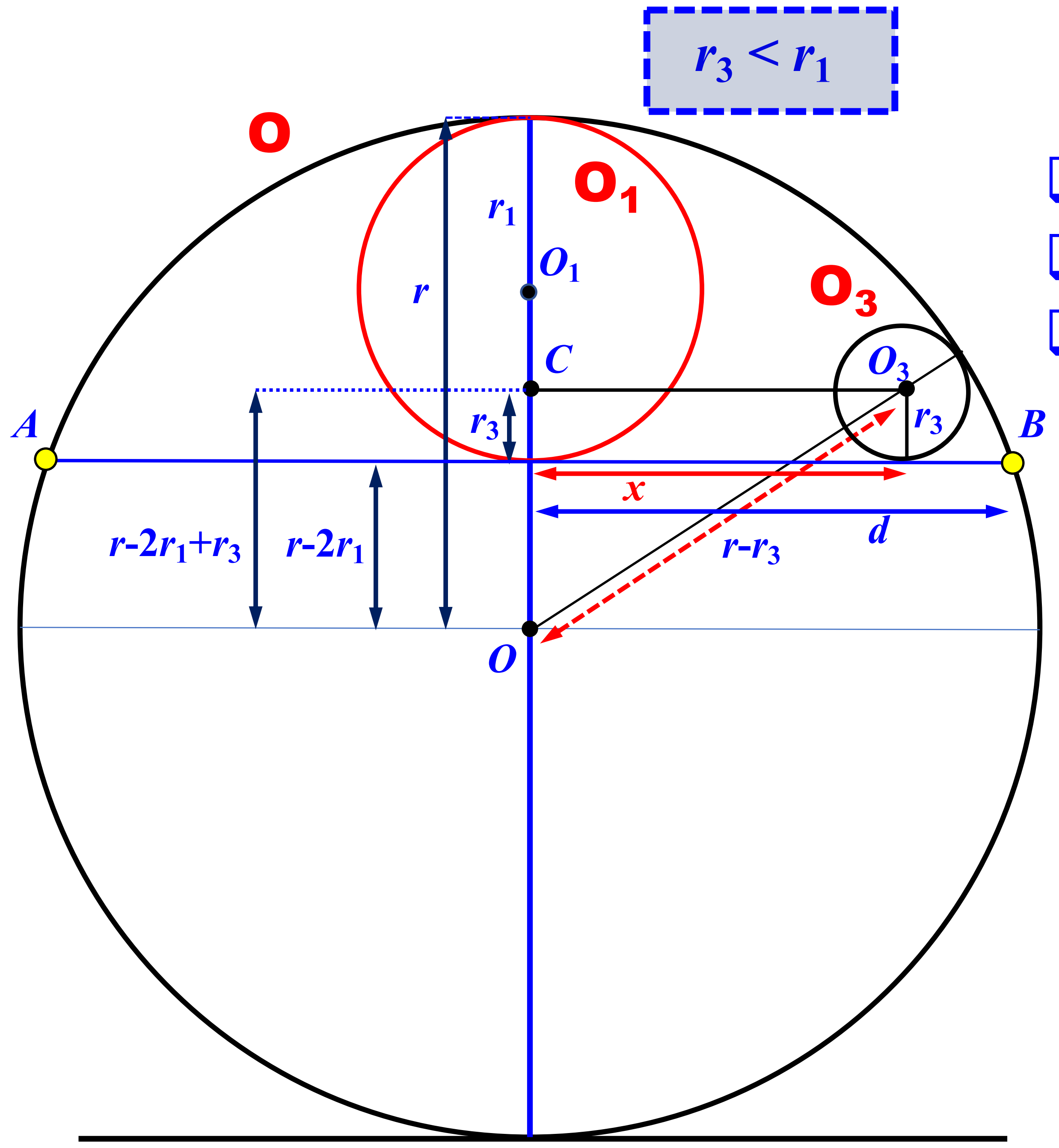
問題7

問題5的反面（逆定理）



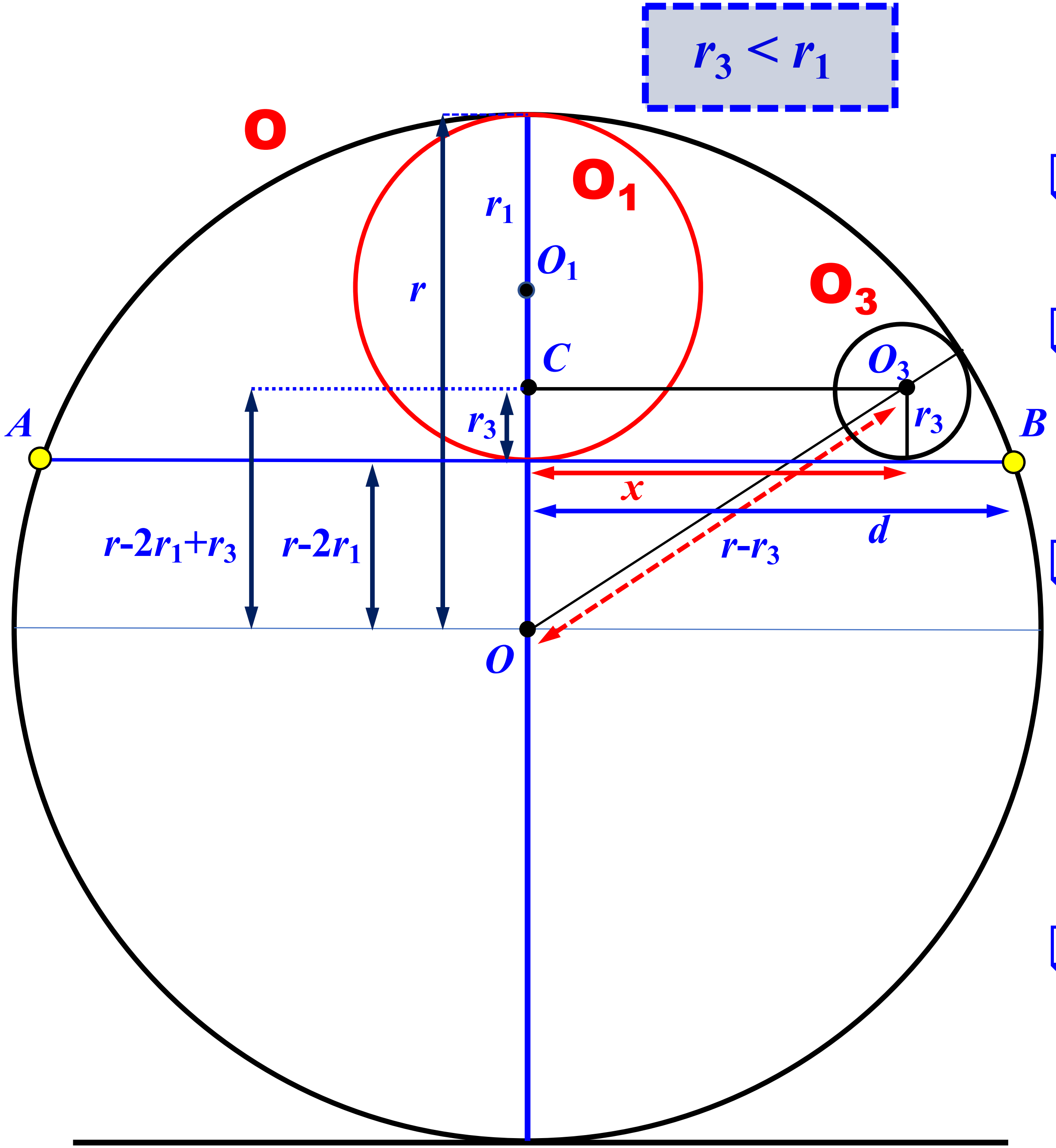
問題

- 給定一個圓 O 和弦 $\overline{AB} = 2d$，**在什麼情況下我們可以成功地作出合條件的圓 O_a、圓 O_b 和圓 O_r 的三圓組?**
- 更精確地說，若圓 O_r 和圓 O 與弦相切，在什麼情況下我們可以作出圓 O_a 和圓 O_b 滿足下列條件?
  - 圓 O_a 和圓 O_b 和直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 在 A 和 B處相切
  - 圓 O_a、圓 O_b 和圓 O_r 相互外切



分析: 1/3

- 我們把**問題6**的圖抄過來
- 圖中的圓 O_3 就是問題中的圓 O_r
- 把問題再說一次:
  - 給定圓 O_3， 我們能否找出圓 O_a 和圓 O_b 使得 O_a 和 O_b 分別在 A 與 B 和直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 相切
  - 圓 O_3、圓 O_a 和圓 O_b 兩兩外切



分析: 2/3

- 從問題4我們得到:

$$d^2 = 4r_1(r - r_1)$$

- 所以我們有

$$r - r_1 = \frac{d^2}{4r_1}$$

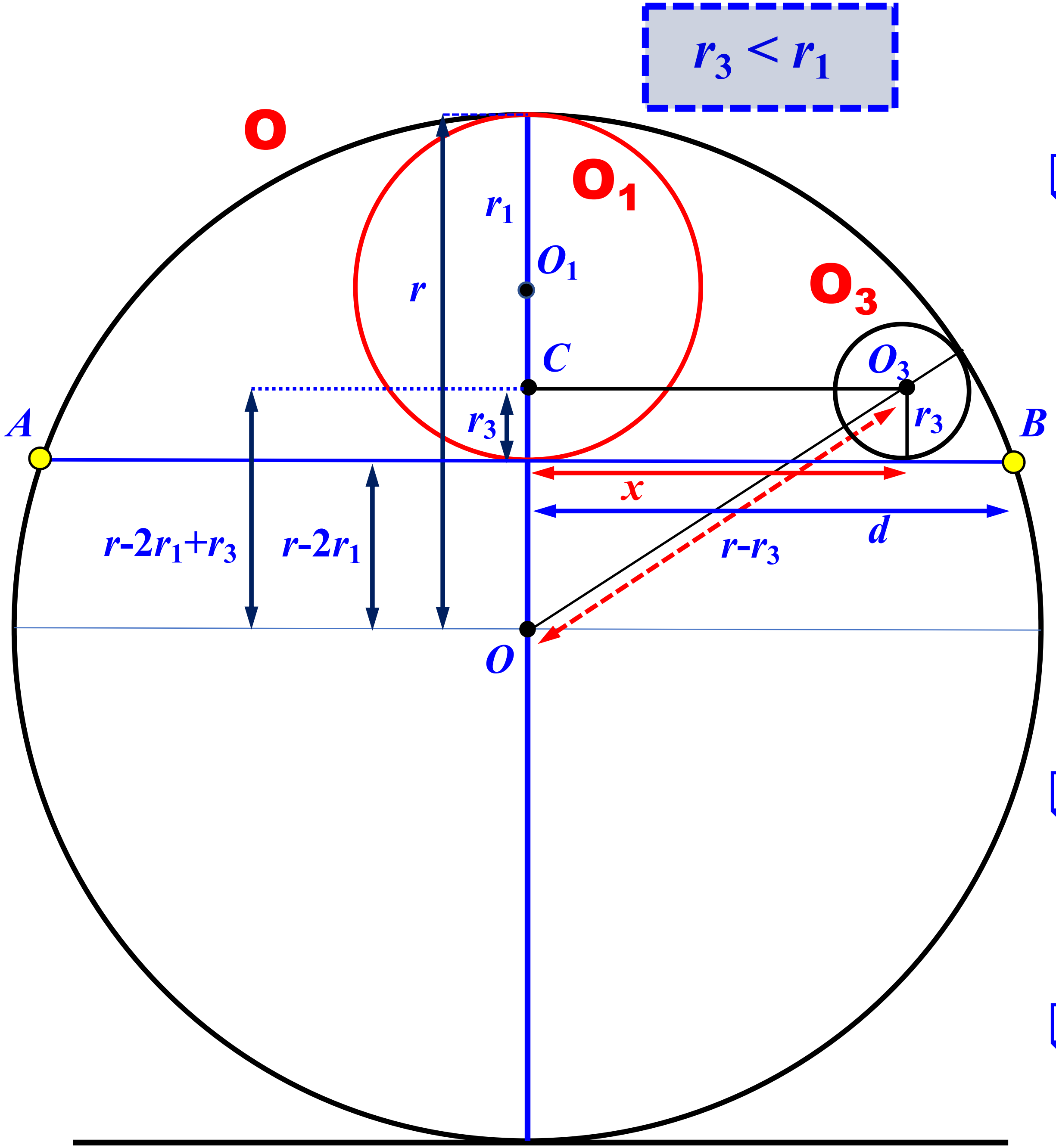
- 再從問題6得到:

$$x^2 = 4(r_1 - r_3)(r - r_1)$$
$$= 4(r_1 - r_3)\frac{d^2}{4r_1}$$
$$= \frac{d^2(r_1 - r_3)}{r_1}$$

我們得用 r_1、d 和 x 表示 r_3

- 解出 r_3 就是

$$r_3 = r_1\left(\frac{d^2 - x^2}{d^2}\right)$$



分析: 3/3

- 在問題5中，我們證明了：給定距離 x 之下， 若能找到圓 O_a 和圓 O_b、使得它們分別在 A 與 B 和直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 相切、而且也和圓 O_r（也就是此地的圓 O_3）相切，於是半徑 r_3 必定滿足下面的條件：

$$r_3 = \frac{1}{4d}\left(d^2 - x^2\right)$$

能夠產一個三圓組 O_a、O_b 和 O_{r3} 的半徑 r_3

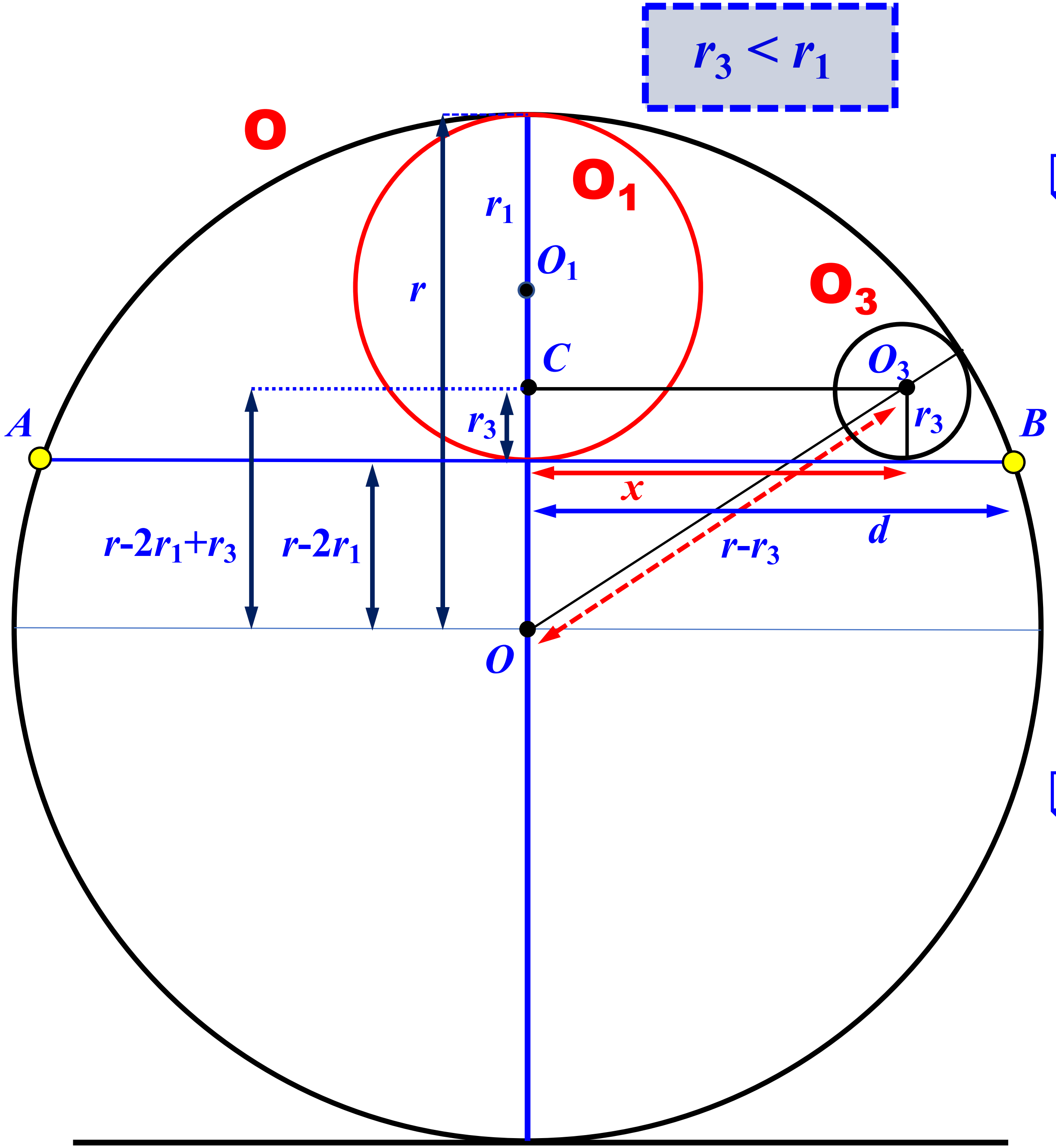
- 這兩個 r_3 必定相同：

$$\frac{1}{4d}\left(d^2 - x^2\right) = r_3 = r_1\left(\frac{d^2 - x^2}{d^2}\right)$$

- 解出 r_1 就得到：

$$r_1 = \frac{d}{4}$$

這個 r_1 可以讓兩個算出的 r_3 版本相等

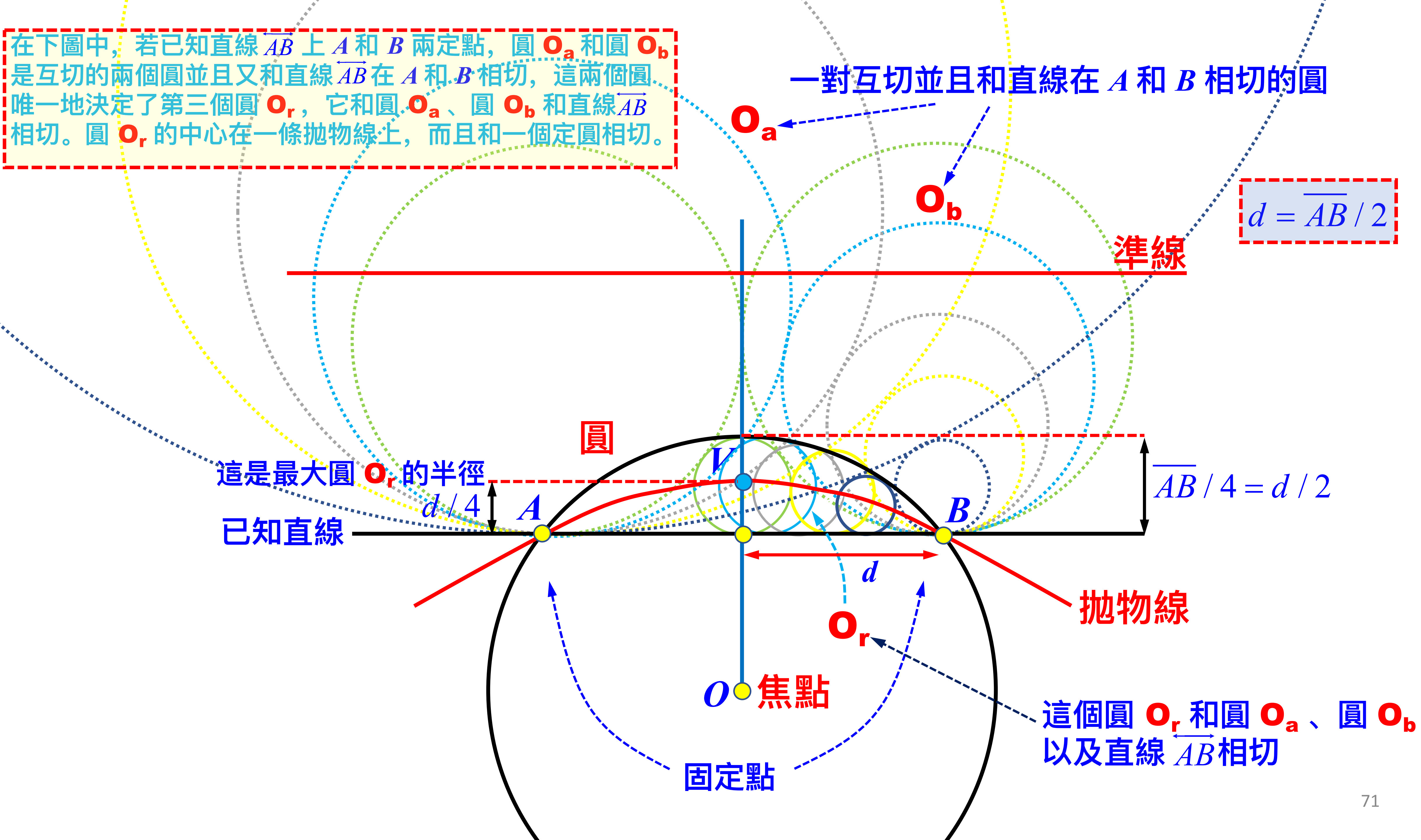


結論

- 若圓 O_1 的半徑 r_1 是四分之一的 d（也就是 $r_1 = d/4$），任何和圓 O 以及直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 相切的圓 O_3 都可以導出滿足下列條件的圓 O_a 和圓 O_b：
  - O_a 和 O_b 分別和直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 在 A 和 B 相切
  - O_a 和 O_b 外切
  - O_3 和圓 O_a 以及圓 O_b 外切
- 所以，這可以算是問題5的逆定理

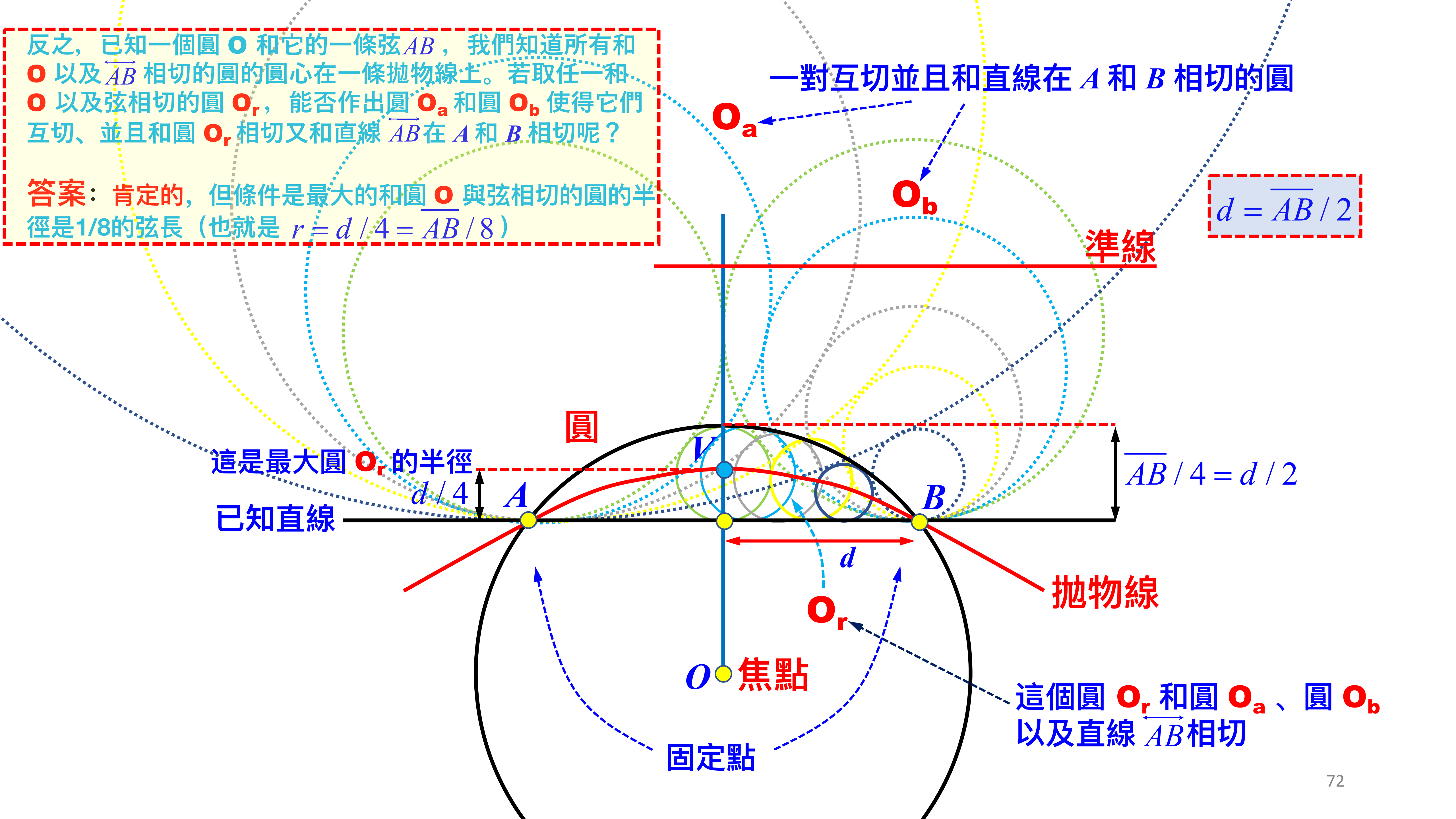
總結

在下圖中，若已知直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上 A 和 B 兩定點，圓 O_a 和圓 O_b 是互切的兩個圓並且又和直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 在 A 和 B 相切，這兩個圓唯一地決定了第三個圓 O_r，它和圓 O_a、圓 O_b 和直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 相切。圓 O_r 的中心在一條拋物線上，而且和一個定圓相切。

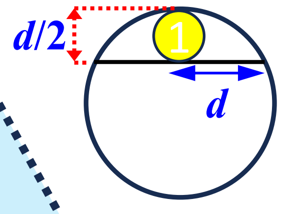


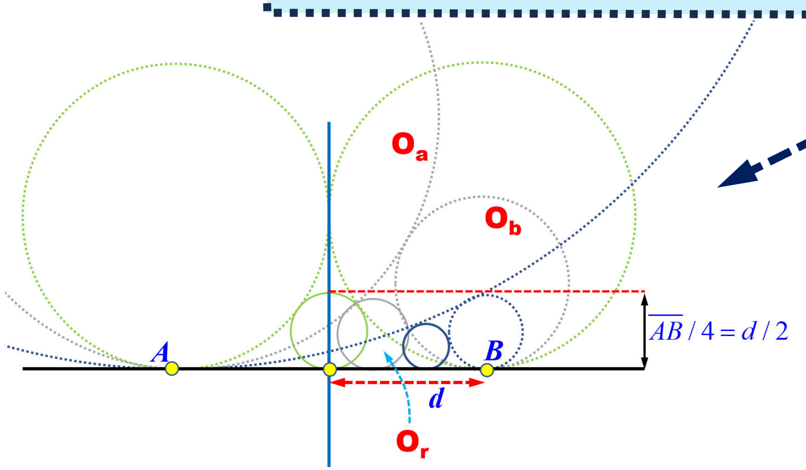
反之，已知一個圓 O 和它的一條弦 $\overline{AB}$，我們知道所有和 O 以及 $\overleftrightarrow{AB}$ 相切的圓的圓心在一條拋物線上。若取任一和 O 以及弦相切的圓 O_r，能否作出圓 O_a 和圓 O_b 使得它們互切、並且和圓 O_r 相切又和直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 在 A 和 B 相切呢？

答案：肯定的，但條件是最大的和圓 O 與弦相切的圓的半徑是1/8的弦長（也就是 $r = d/4 = \overline{AB}/8$）



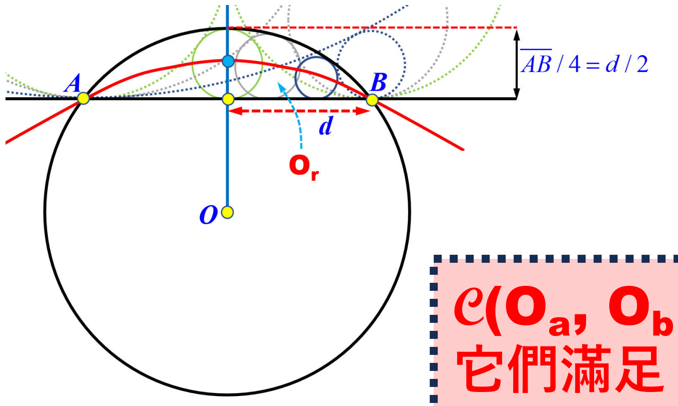
已知直線上兩定點 A 和 B 並且 $d = \overline{AB}/2$





最大圓 O_r 的半徑為 $d/4$

$\mathcal{C}(O_a, O_b, O_r \mid A, B)$ 存在



所有 O_r 都和一個定圓相切而且圓心在一條拋物線上

$\mathcal{C}(O_a, O_b, O_r \mid A, B)$ 表示所有由圓 O_a、圓 O_b 和圓 O_r 構成的三圓組，它們滿足 (1) O_a 和 O_b 互切，(2) O_a 和 O_b 和直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 在 A 和 B 相切而且 (3) O_r 和 O_a、O_b 以及直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 相切

我們學到了什麼?

- 我們討論了七道相關的**日本寺廟幾何**問題
- 所有的問題有一共同特色：**找出某個和一些互切的圓相切的圓的半徑**
- 在某些情況下，滿足條件的圓的圓心在一條拋物線上。我們也複習了拋物線的一些最基本知識。
- 日後我們還會見到類似、但更富挑戰性的題目。

References

1. [Fukagawa:1989] Hidetosi Fukagawa and Dan Pedoe, ***Japanese Temple Geometry Problems: San Gaku***, The Charles Babbage Research Centre, Winnipeg, Canada, 1989.
2. [Fukagawa:2008] Hidetosi Fukagawa and Tony Rothman, ***Sacred Mathematics, Japanese Temple Geometry***, Princeton University Press, 2008.
3. [EI-et-el:1999] Eiichi Ito, Echio Nomura, Hirotaka Kobayashi, Hideaki Tanaka, Isao Kitahara, Kenji Otani, Nobuya Nakamura, Ryutaro Yanagisawa and Tetsuo Sekiguchi, ***Japanese Temple Mathematical Problems in Nagano Pre. Japan***, 1999. Translated from Japanese 算額への招待 by 中村信弥, available at http://www.wasan.jp/english-nagano/english.html.
4. [Nakamura:2010] Nobuya Nakamura, ***Formulas in Traditional Geometry***, Translated from Japanese 算法助術, by長谷川弘 and 山本賀前 (1841), available at http://www.wasan.jp/kosiki/kosiki.html.

Problem References

Problem Number	References
Lemma	Fukagawa:1989 Example 1.1 (p.3)
1	Fukagawa:1989 Example 1.1.1 (p.3)
2	Fukagawa:1989 Example 1.1.3 (p.3)
3	El-et-el:1999 Problem 26.1.2 (p. 142)
4	Nakamura:2010 Formula 29 (p. 21)
5	Fukagawa:1989 Problem 1.1.2 (p.3)
6	Variation of Problem 3
7	A Converse of Problem 5

謝謝收看，3Q