畢氏定理：I
一個流傳了百來年的錯誤說法

天將降大任于是人也，必先苦其心志，勞其筋骨，
餓其體膚，空乏其身，行拂亂其所為，所以動心忍性，
增益其所不能。

孟子

我們會討論什麼?

1. 有一個傳了一百多年的錯誤資訊，這來自1907年由Loomis出的一本書： *The Pythagorean Proposition*。這本書中，Loomis說：『不可能用三角學證明畢氏定理，因為三角學都是基於畢氏定理為真而得。』
2. 我們會証明角和（$\sin(X+Y)$和$\cos(X+Y)$)和角差（$\sin(X-Y)$ 和$\cos(X-Y)$)等式和畢氏定理與畢氏等式（$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$）無關，並且用它們證明畢氏等式。
3. 有了畢氏等式，就等於證明了畢氏定理。

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ 這道式子通常

叫做畢氏等式

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

Advancing research. Creating connections.

AMS Spring Southeastern Sectional Meeting

An Impossible Proof Of Pythagoras

Saturday, March 18, 2023

9:00 AM - 9:30 AM

423 (Clough Undergraduate Learning Commons)

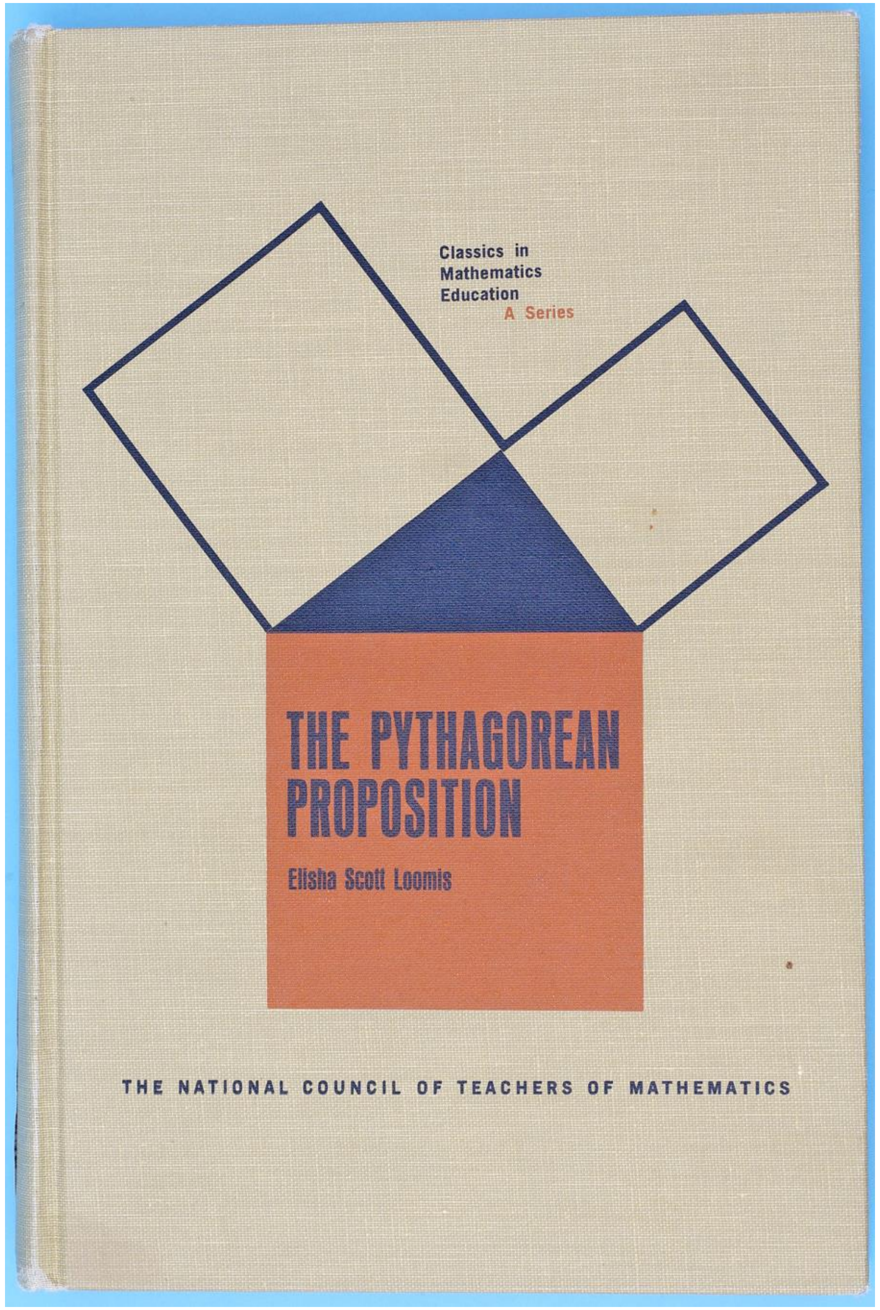
N. D. Jackson和C. R. Johnson在2023年3月發表了畢氏定理的「不可能」證明

Session

AMS Special Session on Undergraduate Mathematics and Statistics Research, I

Abstract

In the 2000 years since trigonometry was discovered it's always been assumed that any alleged proof of Pythagoras's Theorem based on trigonometry must be circular. In fact, in the book containing the largest known collection of proofs (The Pythagorean Proposition by Elisha Loomis) the author flatly states that "There are no trigonometric proofs, because all the fundamental formulae of trigonometry are themselves based upon the truth of the Pythagorean Theorem." But that isn't quite true: in our lecture we present a new proof of Pythagoras's Theorem which is based on a fundamental result in trigonometry—the Law of Sines—and we show that the proof is independent of the Pythagorean trig identity \sin^2x + \cos^2x = 1.



Loomis 1907出版的書: 1/3

Elisha Scott Loomis（1852–1940）出版了*The Pythagorean Proposition* 這本書，書中收錄了256個證明

左邊是由National Council of Teachers of Mathematics在1968年重印的1940年第二版

您可以在此找到這本書的掃描PDF版: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED037335.pdf

Loomis 1907出版的書: 2/3

Elisha Scott Loomis（1852–1940）出版了*The Pythagorean Proposition* 這本書，書中收錄了256個證明

Elisha Scott Loomis在1935年的照片

您可以在此找到這本書的掃描PDF版: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED037335.pdf

Loomis 1907出版的書: 3/3

NO TRIGONOMETRIC PROOFS

Facing forward the thoughtful reader may raise the question: Are there any proofs based upon the science of trigonometry or analytical geometry?

There are no trigonometric proofs, because all the fundamental formulae of trigonometry are themselves based upon the truth of the Pythagorean Theorem; because of this theorem we say $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, etc. Triginometry *is* because the Pythagorean Theorem *is*.

您可以在此找到這本書的掃描PDF版: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED037335.pdf

接下來要討論的內容: 1/2

1. 我們打算證明Loomis的說法（三角學是基於畢氏定理）是錯誤的。
2. Jason Zimba 證明角差公式（$\sin(\alpha-\beta)$ 和$\cos(\alpha-\beta)$）和畢氏定理和畢氏等式無關，也就是說：不用畢氏定理和畢氏等式就可以証明角差公式。
3. 事實上，不用畢氏定理和畢氏等式也可以證明角和公式（$\sin(\alpha+\beta)$ 和$\cos(\alpha+\beta)$）。
4. 然後，倍角公式可以用來證明畢氏等式。
5. 所以，Loomis的講法是錯誤的。

接下來要討論的內容: 2/2

- 我們打算證明Loomis的說法（三角學是基於畢氏定理）是錯誤的:
  - ✓Jason Zimba證明了角差公式不依賴畢氏定理和畢氏等式。
  - ✓我們會証明角和公式也不依賴畢氏定理和畢氏等式。
  - ✓於是倍角公式並不依賴畢氏定理和畢氏等式。
  - ✓透過微積分和L’Hopital法則我們可以用倍角公式導出畢氏等式和畢氏定理。

$\sin(\alpha\text{-}\beta)$ 和$\cos(\alpha\text{-}\beta)$這兩者
都獨立於
畢氏定理和畢氏等式?

答案: 是的!

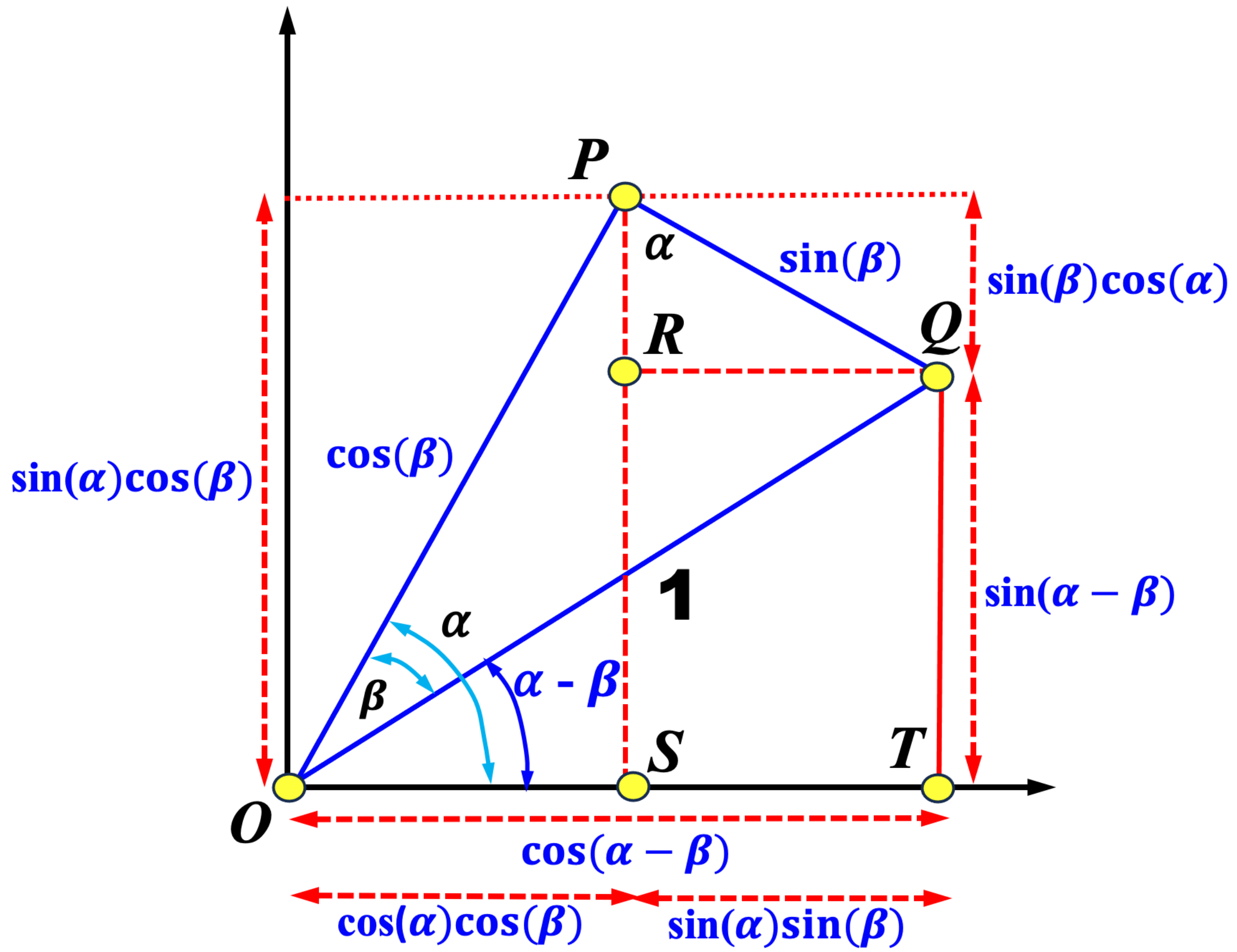
Jason Zimba的證明

角差等式

因為我們的主角是直角三角形，
我們假設三個角滿足

$$90° > \alpha \geq \beta > 0$$

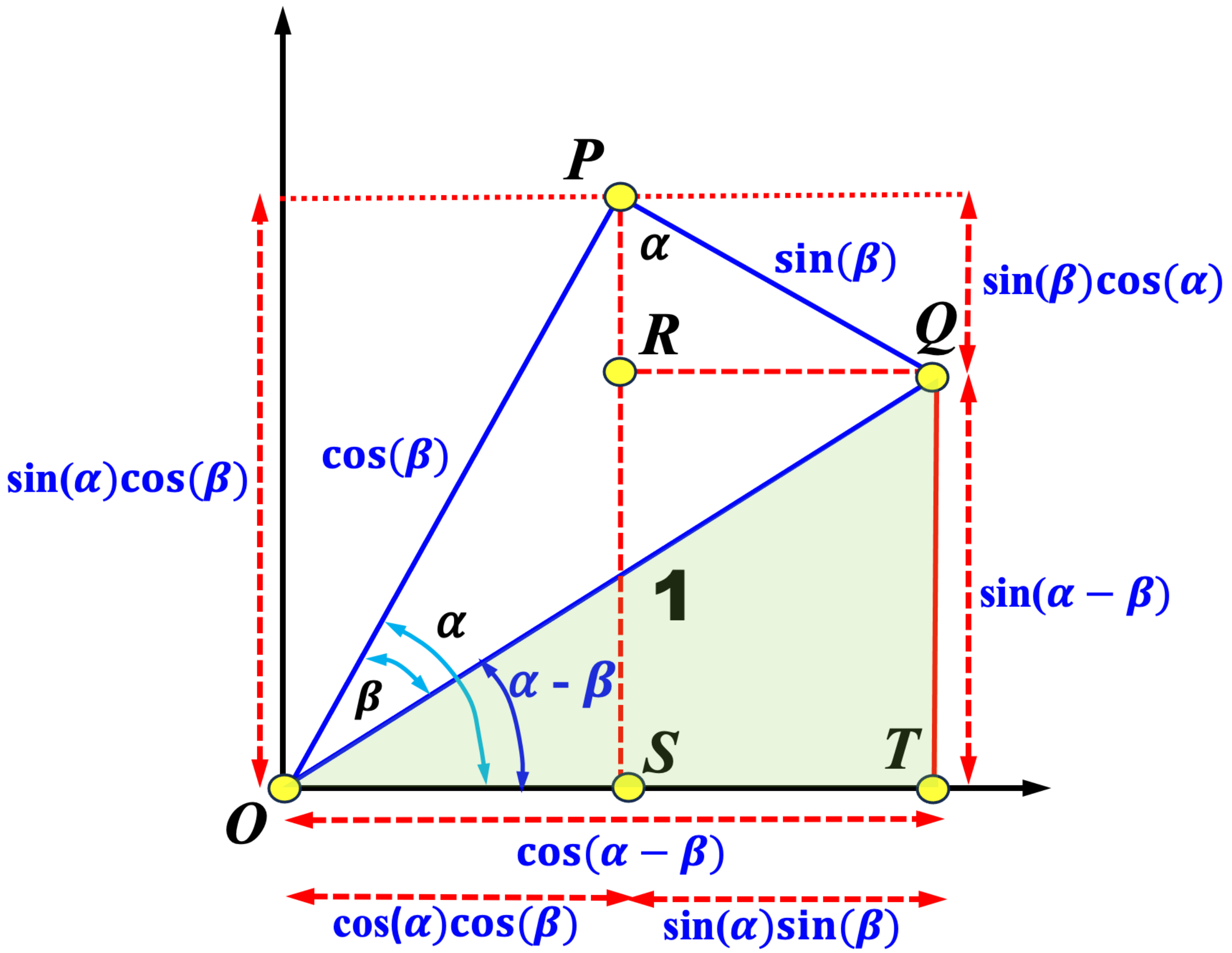
角差等式: 1/7



Assume $90° > \alpha \geq \beta > 0$

1. 假設直線OP 和x軸夾角為α.
2. 直線OQ和直線OP的夾角為β.
3. 直線OQ和x 軸的夾角為α - β.
4. 假設OQ的長度為1.
5. 令從Q到直線OP的垂足為P.

Jason Zimba, On the Possibility of Trigonometric Proofs of the Pythagorean Theorem,
Forum Geometricorum: A Journal on Classical Euclidean Geometry, Vol. 9 (2009), pp. 275–278.



角差等式: 2/7

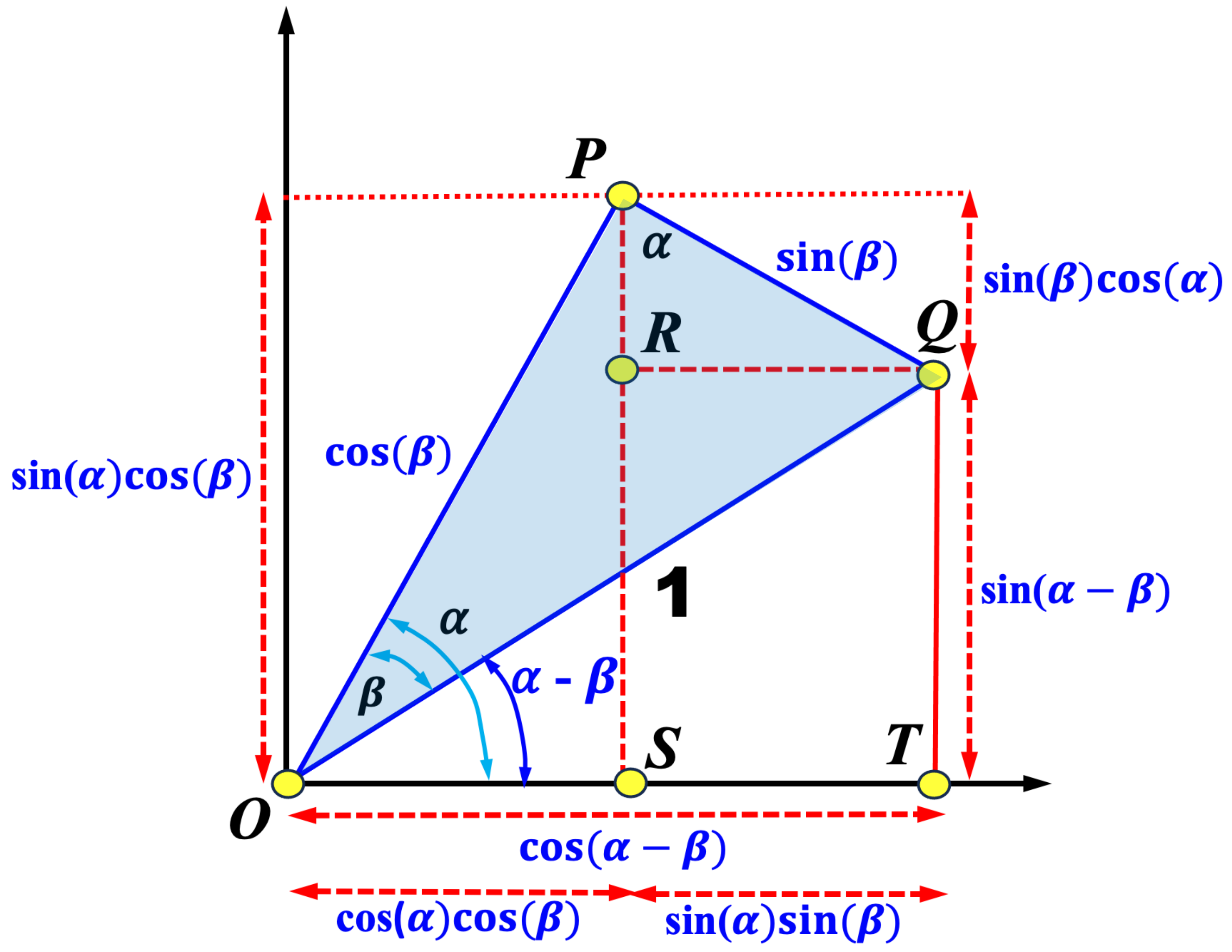
Assume $90° > \alpha \geq \beta > 0$

1. 令從 P 和 Q 到 x軸的垂足為S和T.
2. 令從 Q到直線PS 的垂足為 R.
3. 從 $\triangle OQT$ 我們得到

$$\sin(\alpha\text{-}\beta) = QT$$
$$\cos(\alpha\text{-}\beta) = OT$$

Jason Zimba, On the Possibility of Trigonometric Proofs of the Pythagorean Theorem,
Forum Geometricorum: A Journal on Classical Euclidean Geometry, Vol. 9 (2009), pp. 275–278.

角差等式: 3/7



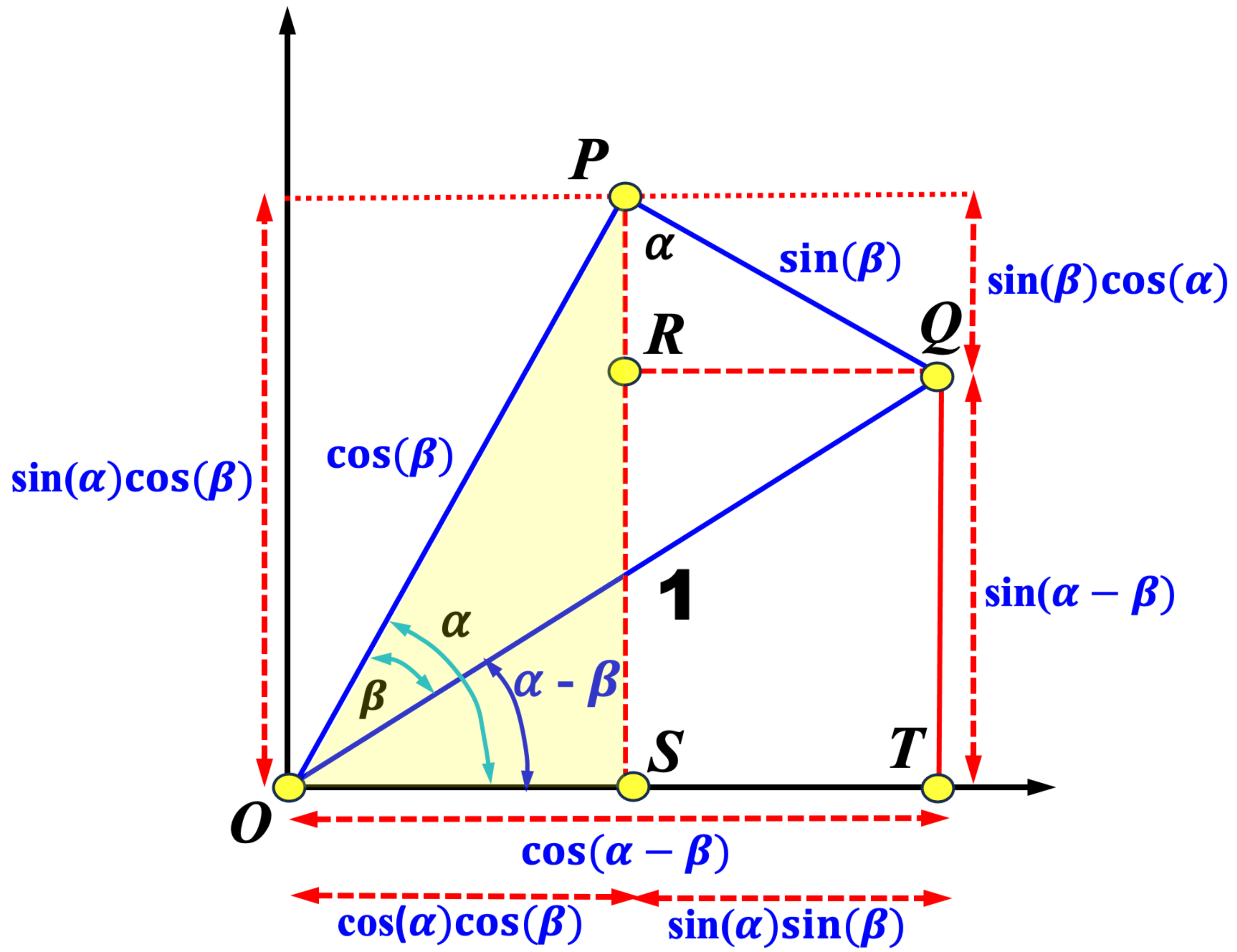
Assume $90° > \alpha \geq \beta > 0$

1. 從 $\triangle OPQ$我們得到

$$\sin(\beta) = PQ$$
$$\cos(\beta) = OP$$

Jason Zimba, On the Possibility of Trigonometric Proofs of the Pythagorean Theorem, *Forum Geometricorum: A Journal on Classical Euclidean Geometry*, Vol. 9 (2009), pp. 275–278.

角差等式: 4/7



Assume $90° > \alpha \geq \beta > 0$

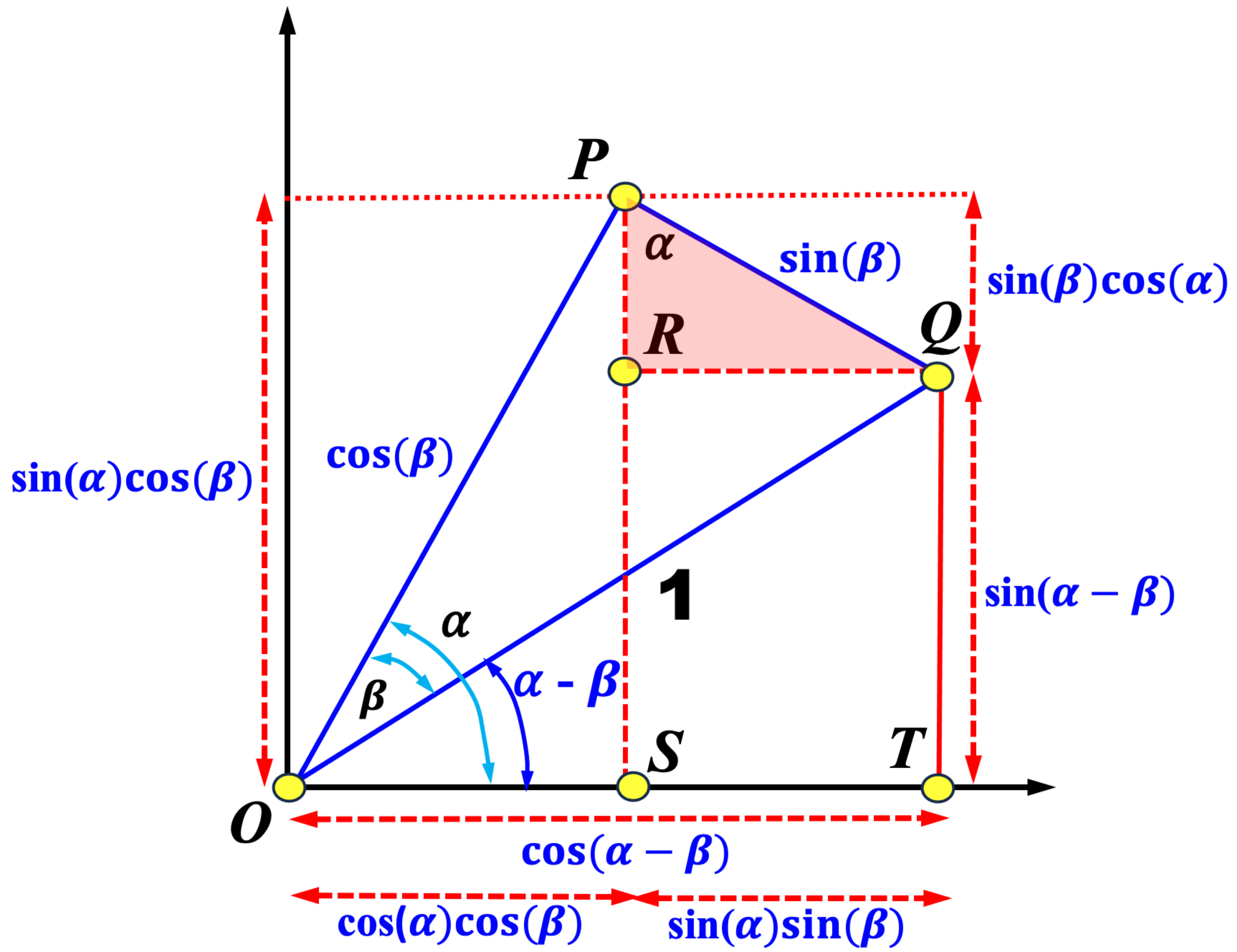
1. 從 $\triangle OPS$ 我們得到

$$\cos(\alpha) = OS/OP = OS/\cos(\beta)$$
$$OS = \cos(\alpha)\cos(\beta)$$

以及

$$\sin(\alpha) = PS/OP = PS/\cos(\beta)$$
$$PS = \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

Jason Zimba, On the Possibility of Trigonometric Proofs of the Pythagorean Theorem, *Forum Geometricorum: A Journal on Classical Euclidean Geometry*, Vol. 9 (2009), pp. 275–278.



角差等式: 5/7

Assume $90° > \alpha \geq \beta > 0$

1. 從 $\triangle PQR$ 我們得到

$$\cos(\alpha) = PR/PQ = PR/\sin(\beta)$$

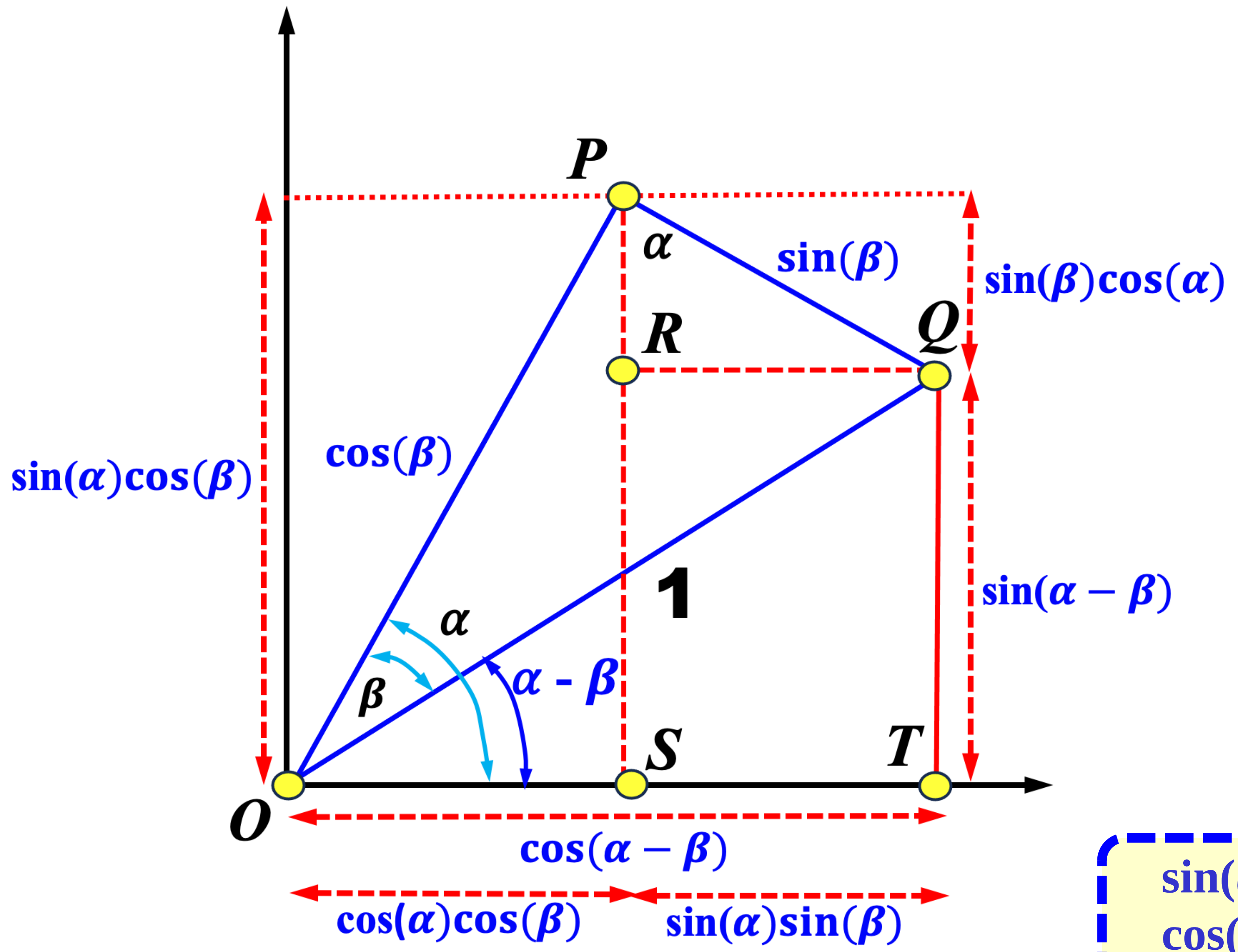
$$PR = \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

以及

$$\sin(\alpha) = RQ/PQ = RQ/\sin(\beta)$$

$$RQ = \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Jason Zimba, On the Possibility of Trigonometric Proofs of the Pythagorean Theorem, *Forum Geometricorum: A Journal on Classical Euclidean Geometry*, Vol. 9 (2009), pp. 275–278.



角差等式: 6/7

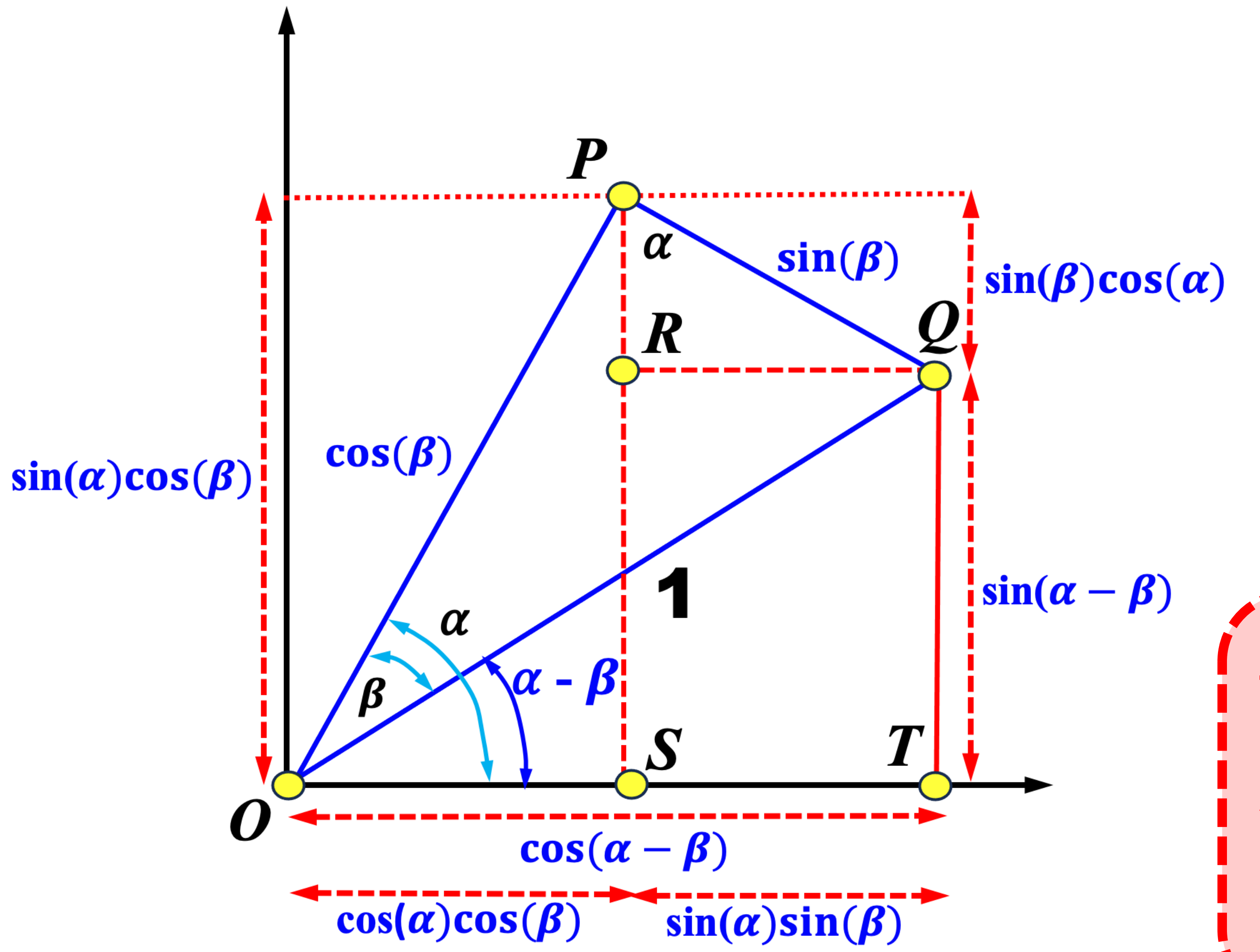
Assume 90° > $\alpha \geq \beta > 0$

1. 綜合起來如下:
   - $\sin(\alpha\text{-}\beta) = QT = PS - PR$
   - $\cos(\alpha\text{-}\beta) = OT = OS + ST$
   - $OS = \cos(\alpha)\cos(\beta)$
   - $PS = \sin(\alpha)\cos(\beta)$
   - $PR = \cos(\alpha)\sin(\beta)$
   - $RQ = \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha\text{-}\beta) = PS - PR = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha\text{-}\beta) = OS + ST = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$

Jason Zimba, On the Possibility of Trigonometric Proofs of the Pythagorean Theorem, *Forum Geometricorum: A Journal on Classical Euclidean Geometry*, Vol. 9 (2009), pp. 275–278.

角差等式: 7/7



Assume 90° > $\alpha \geq \beta$ > 0

$$1 = \cos(0) = \cos(\alpha\text{-}\alpha)$$
$$= \cos(\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\sin(\alpha)$$
$$= \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$$

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ 可以導出畢氏定理。
請自己試一試，很簡單的。

所以， $\sin(\alpha\text{-}\beta)$ 和$\cos(\alpha\text{-}\beta)$與畢氏定理和畢氏等式 $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$獨立。

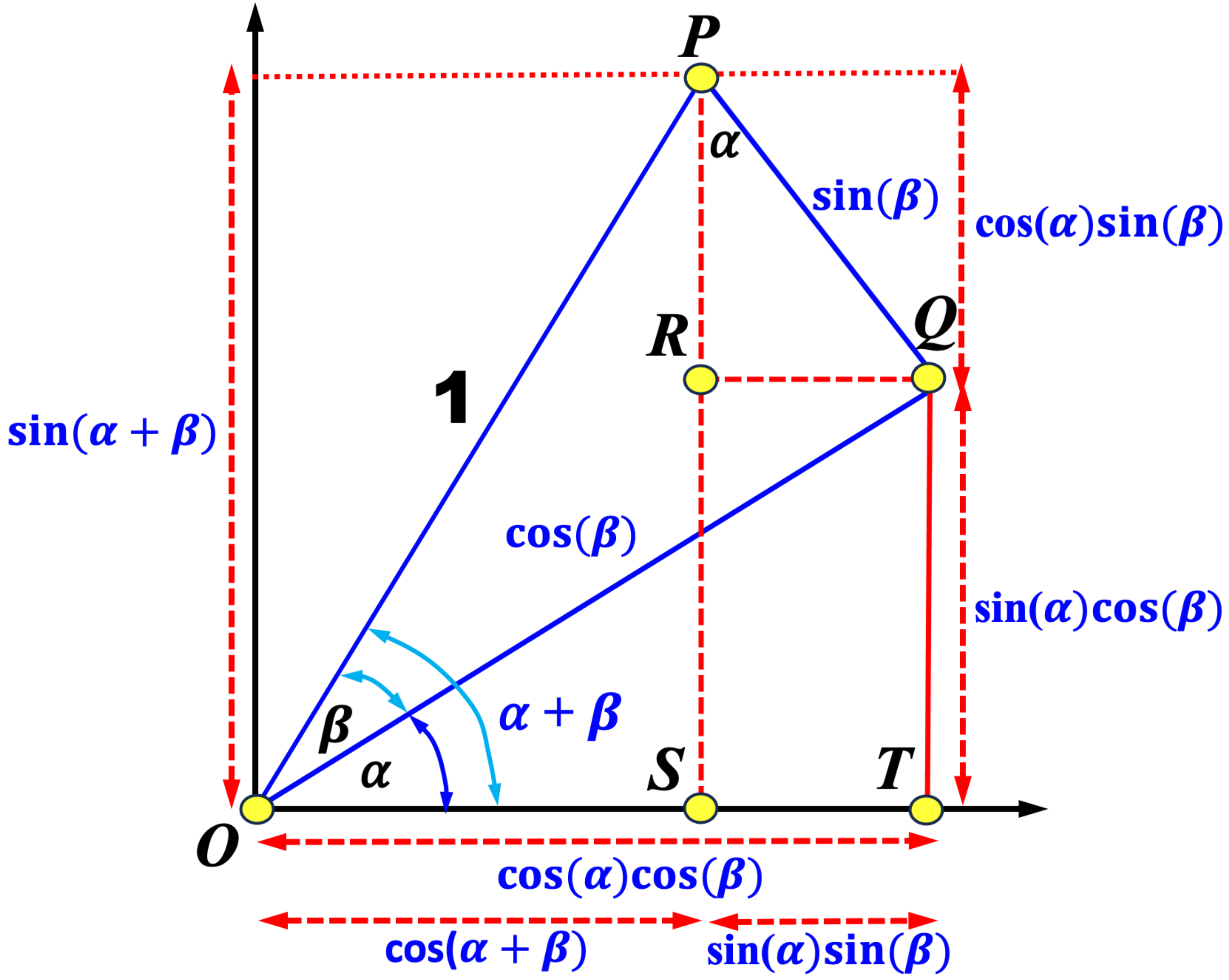
Loomis的說法是錯誤的

Jason Zimba, On the Possibility of Trigonometric Proofs of the Pythagorean Theorem, *Forum Geometricorum: A Journal on Classical Euclidean Geometry*, Vol. 9 (2009), pp. 275–278.

$\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$ 這兩者都獨立於畢氏定理和畢氏等式？

答案： 是的！

角和等式

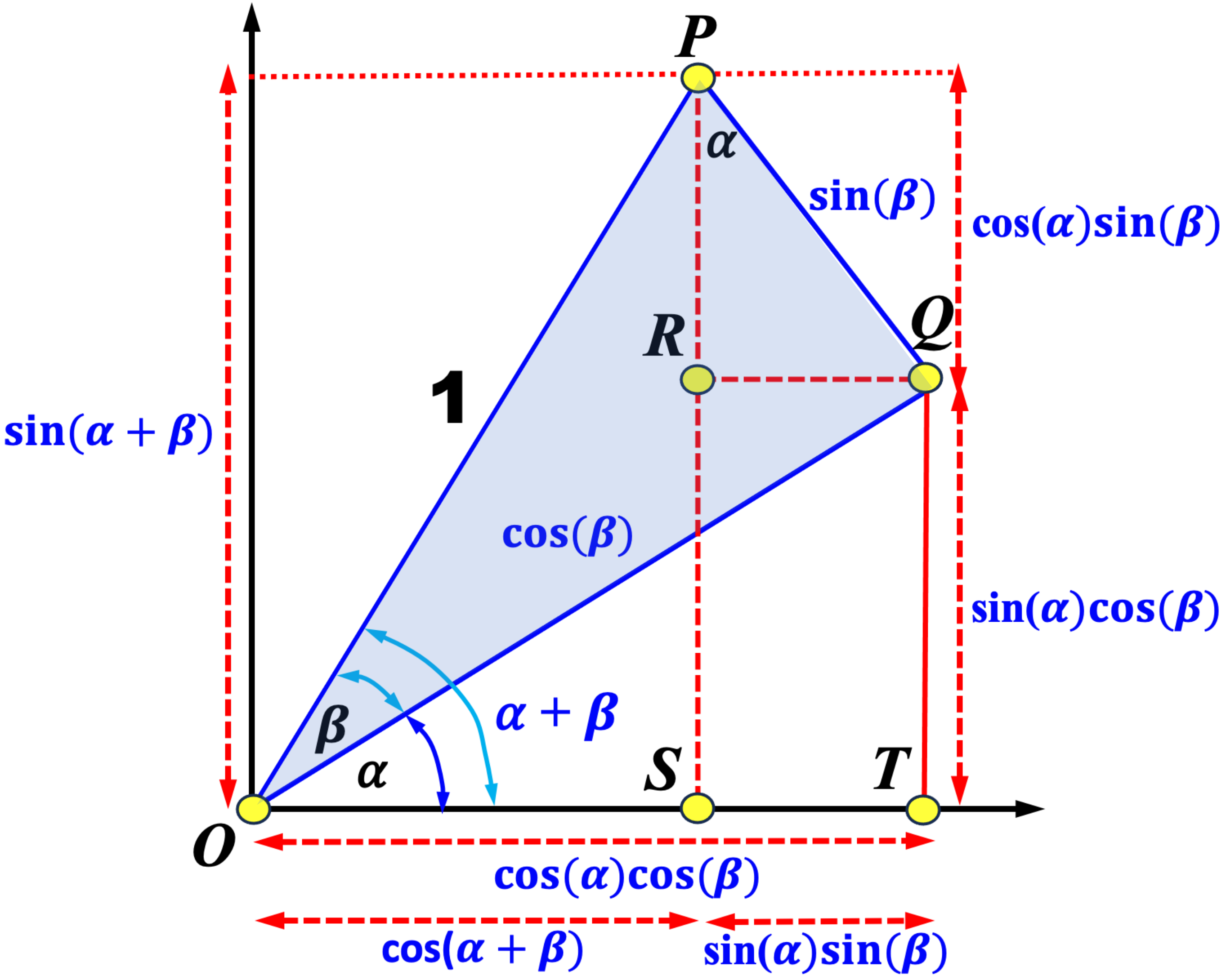


角和等式: 1/6

Assume $90° > \alpha + \beta > 0$

1. 令直線 OP 和 x 軸的夾角為 $\alpha+\beta$。
2. 令直線 OQ 和 x 軸的夾角 α。
3. 於是直線 OQ 和直線 OP 的夾角為 β。
4. 令 OP 的長度為 1。
5. 令從 P 到直線 OQ 的垂足為 Q。於是直線 PQ 和直線 OQ 在 Q 垂直。

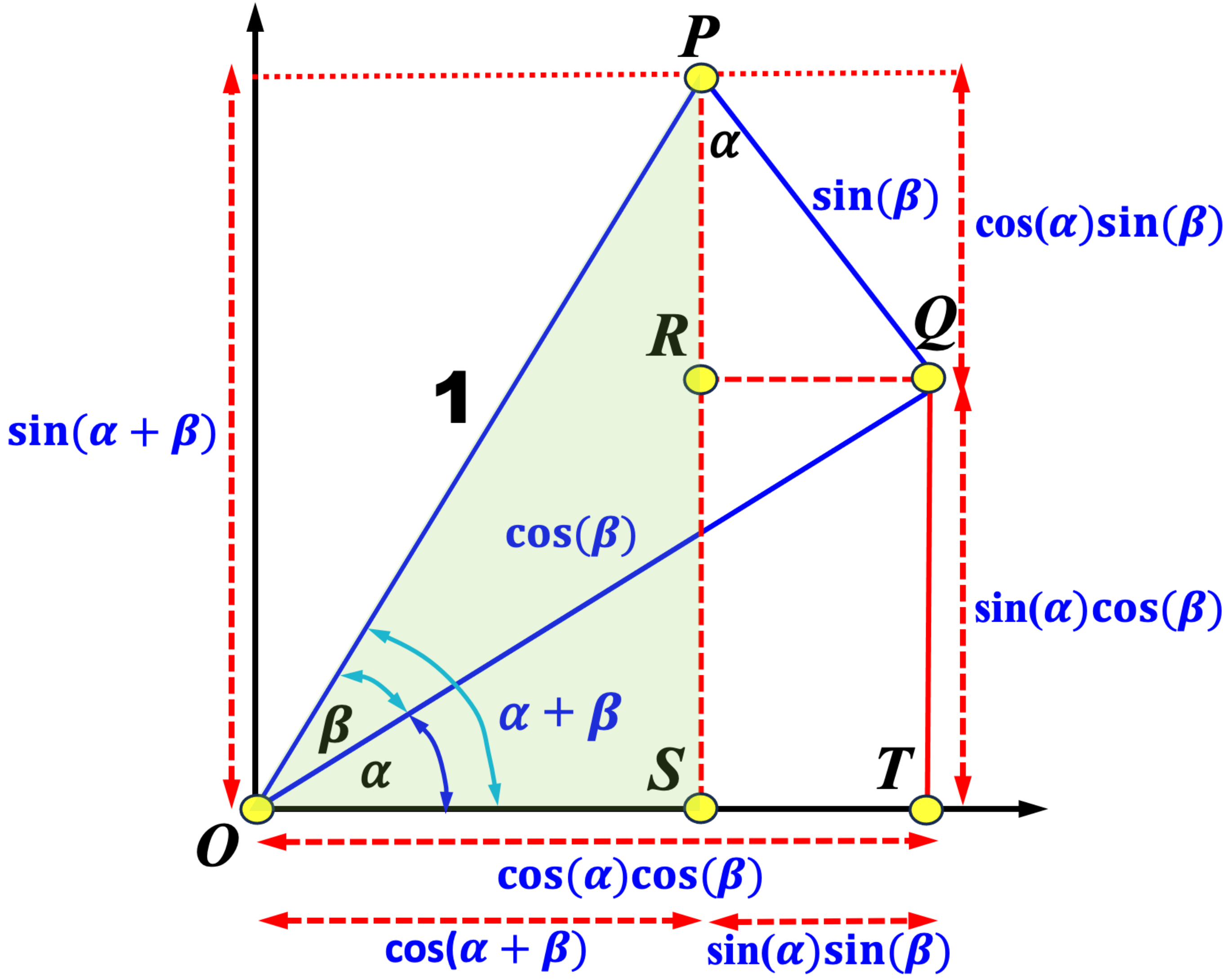
角和等式: 2/6



Assume $90° > \alpha + \beta > 0$

1. 從$\triangle OPQ$ 因為 OP=1，
   我們得到

$$PQ = \sin(\beta)$$
$$OQ = \cos(\beta)$$

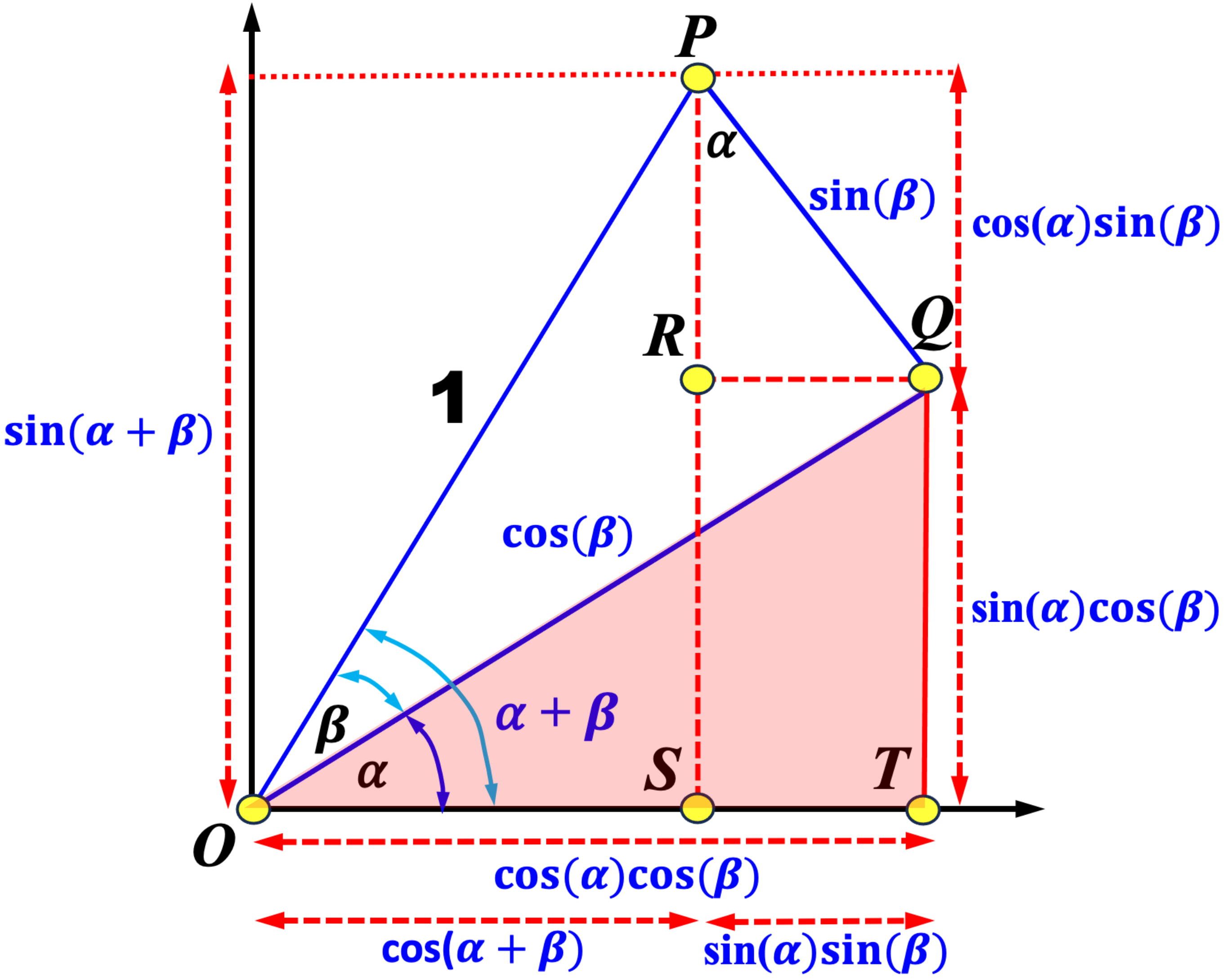


角和等式: 3/6

Assume 90° > $\alpha + \beta$ > 0

1. 從 $\triangle OPS$ 因為 OP=1，
   我們得到

$$PS = \sin(\alpha+\beta)$$
$$OS = \cos(\alpha+\beta)$$

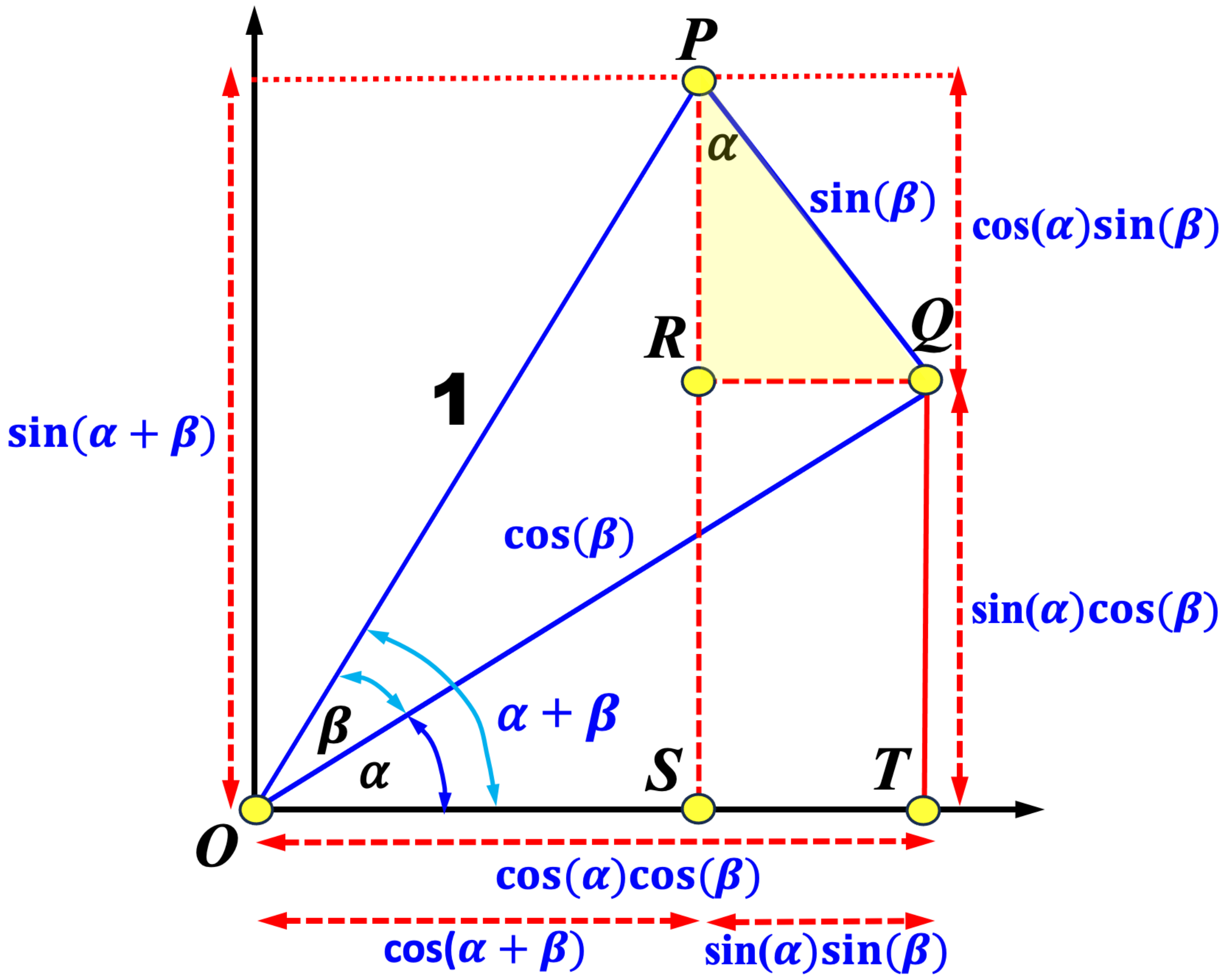


角和等式: 4/6

Assume $90° > \alpha + \beta > 0$

1. 從 $\triangle OQT$ 因為 $OQ = \cos(\beta)$，我們得到

$$QT = \sin(\alpha)\cos(\beta)$$
$$OT = \cos(\alpha)\cos(\beta)$$



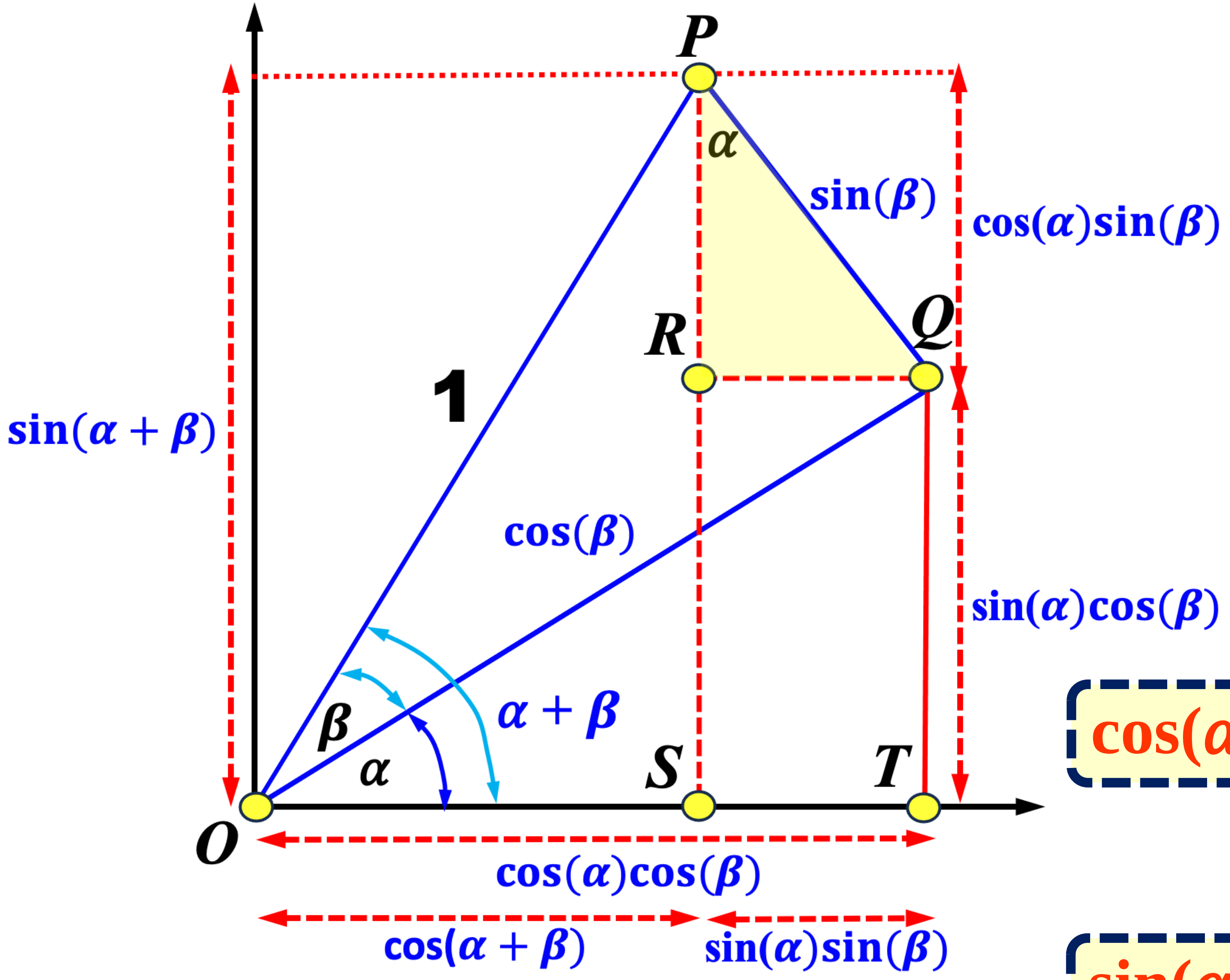
角和等式: 5/6

Assume $90° > \alpha + \beta > 0$

1. 從 $\triangle PQR$ 因為 $PQ = \sin(\beta)$，我們得到

$$PR = \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$RQ = ST = \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

角和等式: 6/6



Assume $90° > \alpha + \beta > 0$

1. 因為 $OT = OS + ST$
   而且 $PS = PR + RS$，我們有

$$\underbrace{\cos(\alpha)\cos(\beta)}_{OT} = \underbrace{\cos(\alpha+\beta)}_{OS} + \underbrace{\sin(\alpha)\sin(\beta)}_{ST}$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

$PS = PR + RS$ 則導致

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}$$

倍角等式

倍角等式

- 因為角和等式獨立於畢氏定理和畢氏等式，而倍角等式又是角和等式的直接結果，所以倍角等式也獨立於畢氏定理和畢氏等式。

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

我們可以用$\sin(\alpha+\beta)$ 和$\cos(\alpha+\beta)$證明$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$嗎?

答案： 可以!

我們需要以下知識…

1. 證明計算 $\sin(x)$ 和 $\cos(x)$ 的導數（微分）並不需要畢氏定理和畢氏等式。
2. 為此，我們需要**積化和差**（***product-to-sum***）等式。
3. 我們也需要「**當 x 趨近於 0 時 $\sin(x)/x$ 的極限為 1**」這個結果和畢氏定理與畢氏等式獨立。請查您的微積分課本。
4. 其餘的都十分容易。

積化和差等式: 1/2

1. 從角和等式得到如下結果：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

2. 第一式減第二式是：

$$\underbrace{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}_{\textbf{sum}}=\underbrace{2\cos(\alpha)\sin(\beta)}_{\textbf{product}}$$

積化和差等式: 2/2

1. 令 $p = \alpha+\beta$ 和 $q = \alpha-\beta$，我們得到

$$\sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2. 這是用來計算 $\sin(x)$ 的導數（也就是$\sin'(x)$）的工具。

計算 $d(\sin(x))/dx$

1. $\sin(x)$的導數是這樣算的：

$$\frac{d(\sin(x))}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{(x+h)+x}{2}\right)\sin\left(\frac{(x+h)-x}{2}\right)}{h}$$

$\sin(x)$ 的和化積等式

$$=\lim_{h\to 0}\left[\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)\right]$$

$$=\cos(x)\times 1$$

$$=\cos(x)$$

於是 $d(\sin(x))/dx$ 的計算獨立於畢氏定理和$\sin^2(x)+\cos2(x)=1$

計算 $d(\cos(x))/dx$

1. $\cos(x)$ 的導數:

$$\frac{d(\cos(x))}{dx} = \frac{d(\sin(90^\circ - x))}{dx} = \cos(90^\circ - x)\frac{d(90^\circ - x)}{dx}$$

$$= \sin(x)\frac{d(90^\circ - x)}{dx} = \sin(x)(-1)$$

$$= -\sin(x)$$

於是 $d(\cos(x))/dx$ 的計算獨立於畢氏定理和$\sin^2(x)+\cos2(x)=1$

倍角等式: 1/2

1. 倍角等式來自角和等式

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

倍角等式: 2/2

1. 所以 $\sin^2(x)$ 和 $\cos^2(x)$ 可以如下表示:

$$\sin^2(x)=\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2=4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\cos^2(x)&=\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\\&=\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^2(x)+\cos^2(x)&=\left(\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\\&=\left(\sin^2\left(\frac{x}{2^2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2^2}\right)\right)^{2^2}\\&\vdots\\&=\left(\sin^2\left(\frac{x}{2^n}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^{2^n}\end{aligned}$$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$: 1/3

1. 因為 $a^b = e^{b\times\ln(a)} = \exp(b\times\ln(a))$，此地 exp() 和 $\ln(x)$ 分別是指數函數和自然對數函數, 於是 $(\sin^2(x/2^n) + \cos^2(x/2^n))^{2\wedge n}$ 變成下式:

$$\left(\sin^2\left(\frac{x}{2^n}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^{2^n} = \exp\left(2^n\ln\left(\sin^2\left(\frac{x}{2^n}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln\left(\overbrace{\boxed{\sin^2\left(\frac{x}{2^n}\right)}}^{0}+\overbrace{\boxed{\cos^2\left(\frac{x}{2^n}\right)}}^{1}\right)}{\underbrace{\boxed{\frac{1}{2^n}}}_{\to 0}}\right)$$

$\ln(0+1) = 0$

2. 若 n 趨近無限大，我們會得到一個不確定式exp(0/0)，所以得使用L'Hopital法則。

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$: 2/3

1. 為了方便起見，令 $h = 1/2^n$。於是我們得到下式：

$$\left(\sin^2\left(\frac{x}{2^n}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^{2^n} = \exp\left(\frac{\ln\left(\sin^2(xh)+\cos^2(xh)\right)}{h}\right)$$

2. 使用L'Hopital法則，分別對分子和分母微分。
3. 對分母的 h 微分，結果是 1 。

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$: 3/3

1. 對分子 $\ln(\sin^2(xh) + \cos^2(xh))$ 微分得到：

$$\frac{d\left(\ln\left(\sin^2(xh)+\cos^2(xh)\right)\right)}{dx} = \frac{1}{\sin^2(xh)+\cos^2(xh)}\left(2\sin(xh)\cos(xh)h + 2\cos(xh)(-\sin(xh))h\right)$$
$$= 0$$

2. 當 h 趨於 0 （n 趨於無限大） $\exp(\ln(\sin^2(x/2^n) + \cos^2(x/2^n))/(1/2^n))$ 就趨近 $\exp(0) = 1$；所以， $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$。

加一點微積分: 1/2

1. 因為 $d(\sin(x))/dx$ 和 $d(\cos(x))/d$ 都獨立於畢氏定理和 $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$，我們就可以用它們證明$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$。
2. 定義函數 $f(x)$ 如下:
$$f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$$
3. 對 $f(x)$ 微分得到:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(\sin^2(x) + \cos^2(x))}{dx} = 2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)(-\sin(x)) = 0$$

加一點微積分: 2/2

1. $d(\sin^2(x)+\cos^2(x))/dx = 0$ 表示函數 $f(x) = \sin^2(x)+\cos^2(x)$ 是一個常數函數。
2. 於是，$f(x)$ 等於某個常數值 c：

$$f(x)=\sin^2(x)+\cos^2(x)=c$$

3. 因為 $\sin(0) = 0$ 和 $\cos(0) = 1$，我們得到

$$f(x)=\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

總 結

我們學到了什麼？ 1/2

- Elisha S. Loomis (1852—1940) 在1907年出版一本書 *The Pythagorean Proposition*， 其中收錄了畢氏定理的256個證明。
- Loomis 還說，不可能用三角學證明畢氏定理，因為所有三角學的基本公式和 $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ 都依賴畢氏定理。
- 這個錯誤的說法流傳甚廣而且也被廣泛引用100多年，**我們證明了這個說法是錯的**。

我們學到了什麼？2/2

- 我們證明了以下幾項結果：
  - ✓ 角和和角差等式和畢氏定理與$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ 獨立。
  - ✓ $\sin(x)$ 和 $\cos(x)$ 的微分也和畢氏定理與 $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ 獨立。
  - ✓ 事實上，角差等式和角和等式都可以用來証明畢氏定理。

References

1. Elisha Scott Loomis, *The Pythagorean Proposition*, 2nd edition, The National Council of Teachers of Mathematics, 1940. A scanned PDF file can be found at https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED037335.pdf.
2. Jason Zimba, On the Possibility of Trigonometric Proofs of the Pythagorean Theorem, *Forum Geometricorum: A Journal on Classical Euclidean Geometry*, Vol. 9 (2009), pp. 275–278.
3. 這個網頁可以下載本投影片: https://pages.mtu.edu/~shene/VIDEOS/GEOMETRY/index-TW.html；這個網頁是英文版: https://pages.mtu.edu/~shene/VIDEOS/GEOMETRY/index-EN.html，其中還有一篇有關本影片內容的長文

結束， 謝謝觀看