畢氏定理：II

畢氏定理的新証法

天將降大任于是人也，必先苦其心志，勞其筋骨，
餓其體膚，空乏其身，行拂亂其所為，所以動心忍性，
增益其所不能。

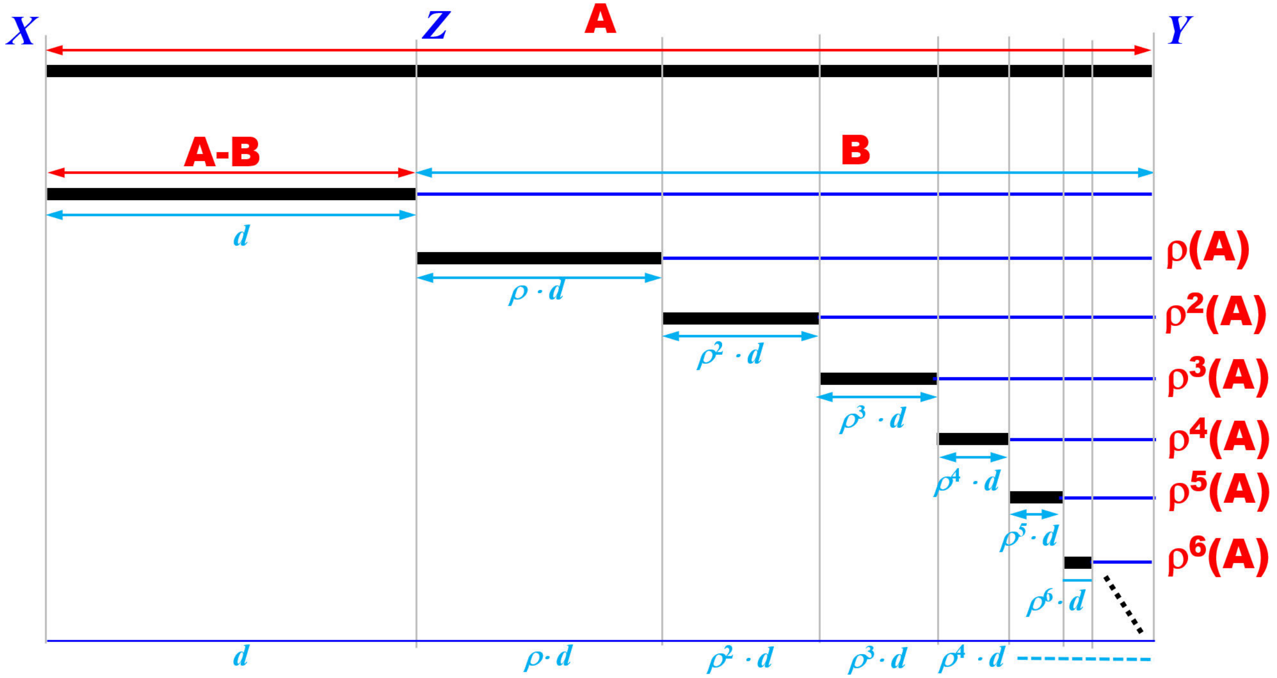
孟子

我們會討論到的內容

1. 幾何級數可以用來計算線段長度和面積。
2. 這用到相似的觀念和比例尺（或比例因子）。
3. 這個技巧可以導出一些新的對畢氏定理的證明。
4. 我們可以很容易地用這項新技巧從新做過Loomis書中的很多證明。
5. 透過Lemoine/Grebe/Symmedian點，我們還發現了（可能是）新的證明。
6. Lemoine點也叫做類似重心（見後文）。

相似觀念和
比例因子

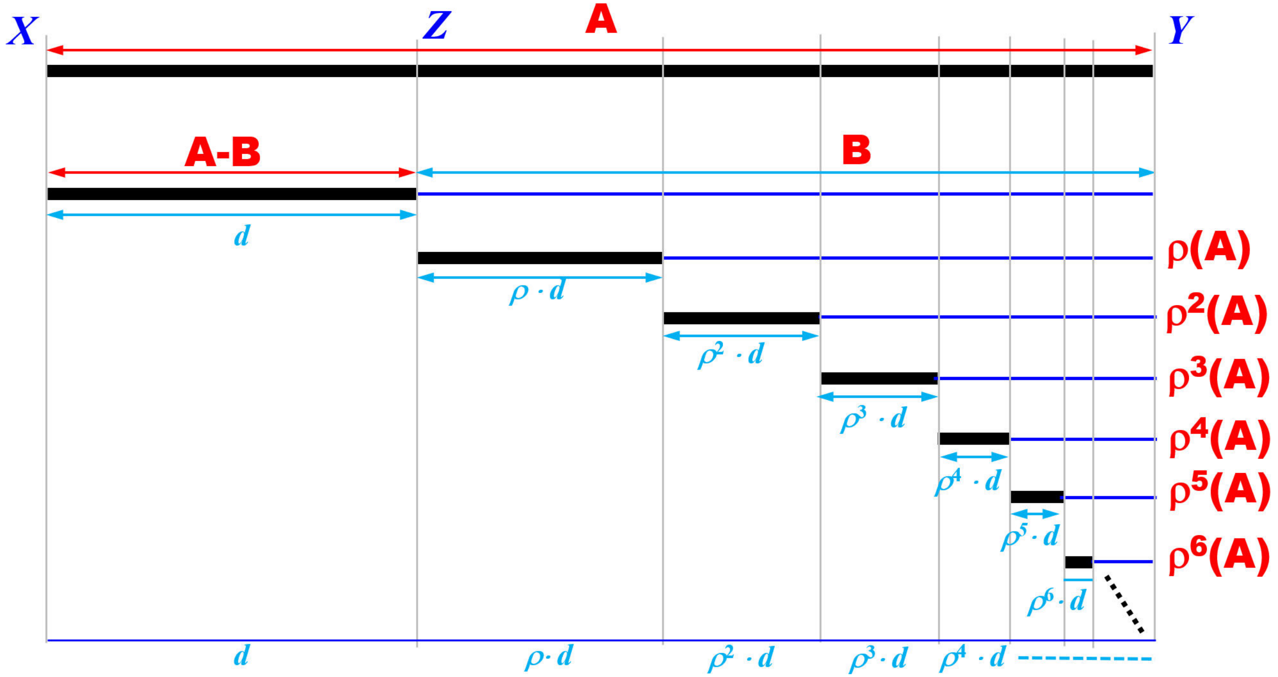
新主意（線性）：1/3



$$d\left(1+\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4+\cdots\right)=\frac{d}{1-\rho}$$

1. 已知一個線段 XY 和在線段中的一個點 Z，如何計算線段 XY 的長度?
2. 我們把線段 XY 叫做 **A**，線段ZY 叫做 **B**，而線段 XZ 叫做 **A-B** 。
3. 如果我們知道 **B** 對應於 **A** 的比值，那麼 **A** 的長就可以用這個比值以及 **A-B** 的長算出來。

新主意（線性）：2/3



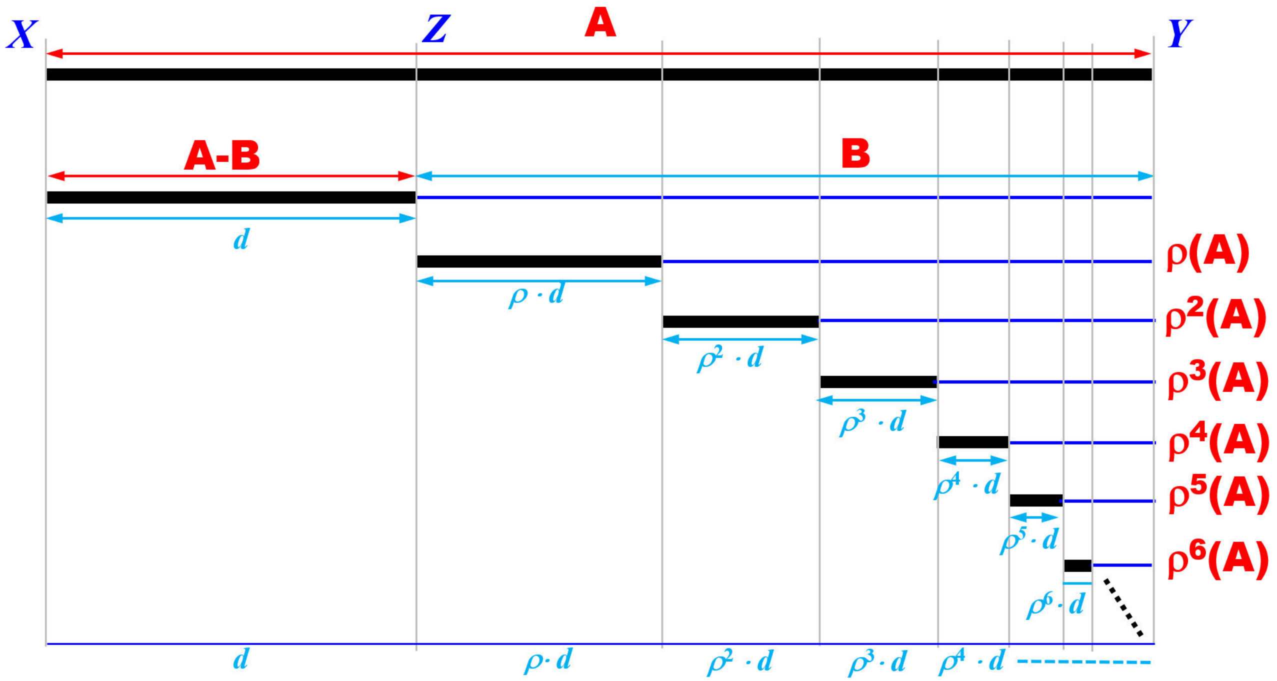
$$d\left(1+\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4+\cdots\right)=\frac{d}{1-\rho}$$

1. 已知一個線段 XY 和在線段中的一個點 Z，如何計算線段 XY 的長度?
2. 假設線段 **B** 的長和線段 **A** 的長的比值是 $\rho < 1$:

$$\rho = \frac{\text{length of } ZY}{\text{length of } XY} = \frac{\overline{ZY}}{\overline{XY}} \quad \text{or} \quad \overline{ZY} = \rho \cdot \overline{XY}$$

3. 這就是從線段 XY 變成線段 ZY 的比例因子（*scaling factor*）。

新主意（線性）：3/3

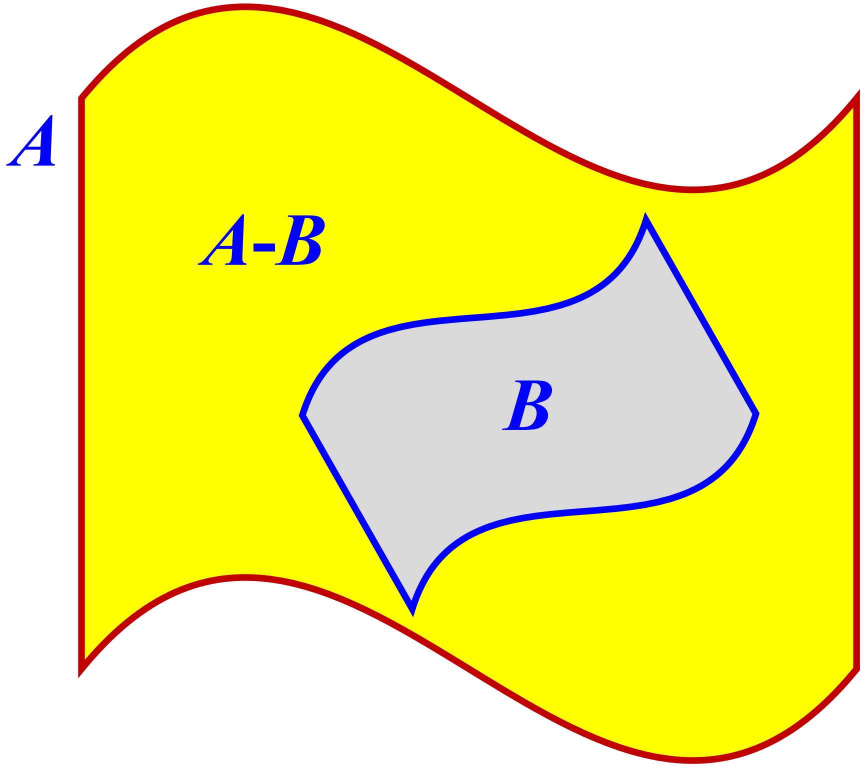


$$d\left(1+\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4+\cdots\right)=\frac{d}{1-\rho}$$

這樣我們就得到：

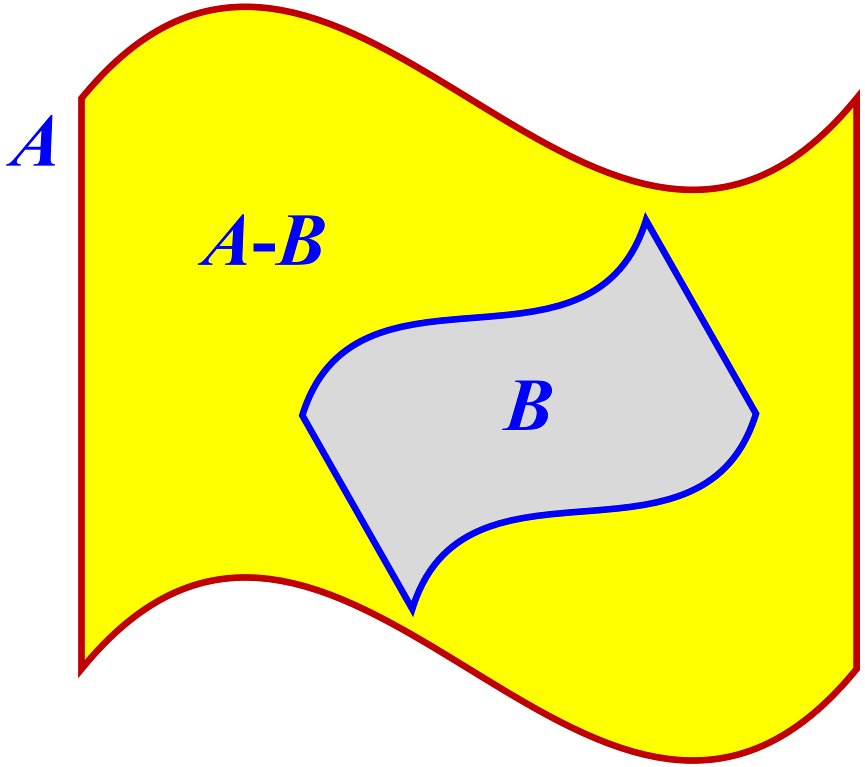
$$
\begin{aligned}
\overline{XY} &= \overline{XZ}+\overline{ZY}\\
&= \overline{XZ}+\rho\cdot\overline{XY}\\
&= \overline{XZ}+\rho\left(\overline{XZ}+\overline{ZY}\right)\\
&= \overline{XZ}+\rho\cdot\overline{XZ}+\rho\cdot\overline{ZY}\\
&= \overline{XZ}+\rho\cdot\overline{XZ}+\rho\left(\rho\cdot\overline{XY}\right)\\
&= \overline{XZ}+\rho\cdot\overline{XZ}+\rho^2\,\overline{XY}\\
&= \overline{XZ}+\rho\cdot\overline{XZ}+\rho^2\left(\overline{XZ}+\overline{ZY}\right)\\
&= \overline{XZ}+\rho\cdot\overline{XZ}+\rho^2\cdot\overline{XZ}+\rho^2\cdot\overline{ZY}\\
&= \overline{XZ}+\rho\cdot\overline{XZ}+\rho^2\cdot\overline{XZ}+\rho^2\left(\rho\cdot\overline{XY}\right)\\
&= \overline{XZ}+\rho\cdot\overline{XZ}+\rho^2\cdot\overline{XZ}+\rho^3\cdot\overline{XY}\\
&\vdots\\
&= \overline{XZ}+\rho\cdot\overline{XZ}+\rho^2\cdot\overline{XZ}+\rho^3\cdot\overline{XZ}+\cdots\\
&= \overline{XZ}\left(1+\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4+\cdots\right)\\
&= \frac{1}{1-\rho}\,\overline{XZ}
\end{aligned}
$$

新主意（面積）：1/10



1. 已知一個（多邊型的）幾何圖形 A，如何計算它的面積?
2. 若圖形 A 內有一個與 A 相似的圖形 B、而且我們又知道如何計算 A-B 的面積，那麼計算A的面積並不難。
3. 我們用 $\mathcal{A}(X)$ 表示 X 的面積。

新主意（面積）：2/10



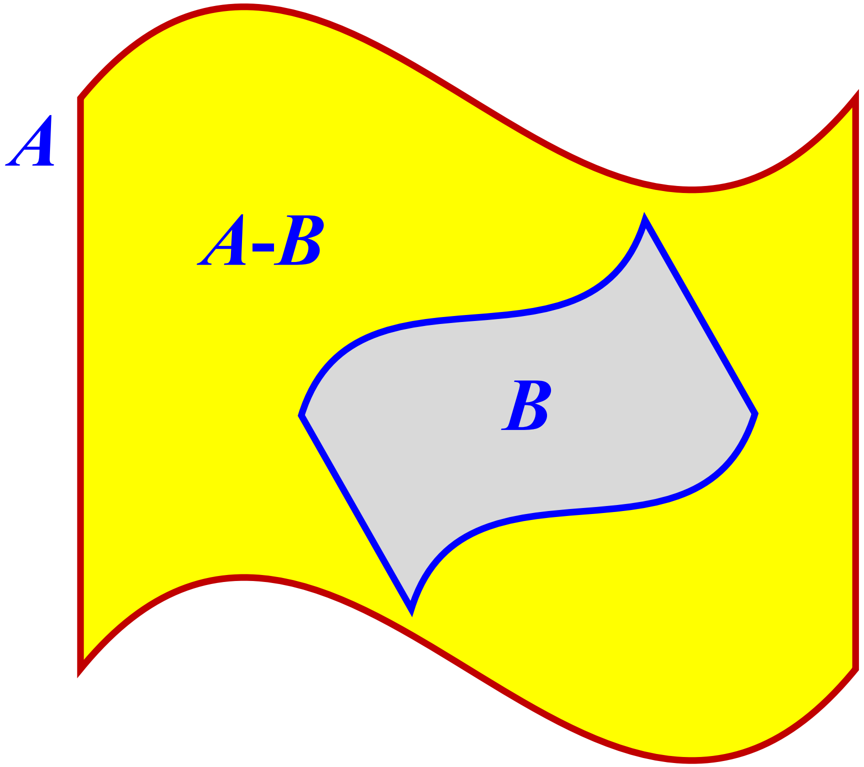
1. *B* 的面積和的 *A* 面積滿足

$$\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(A\text{-}B) + \mathcal{A}(B)\ .$$

2. 因為 *A* 和 *B* 相似，這表示 *A* 中的每一條邊 *e* 和它在 *B* 中對應的邊 *f* 會滿足 $f = \rho\times e\ (\rho < 1)$。
3. 這個 ρ 就是從 *A* 縮小到 *B* 的比例因子（*scaling factor*）。
4. 因為面積是個二維物體，所以面積（而非長度）的比例因子為 ρ^2 。
5. 更精確地說，我們得到：

$$\mathcal{A}(B) = \rho^2 \times \mathcal{A}(A).$$

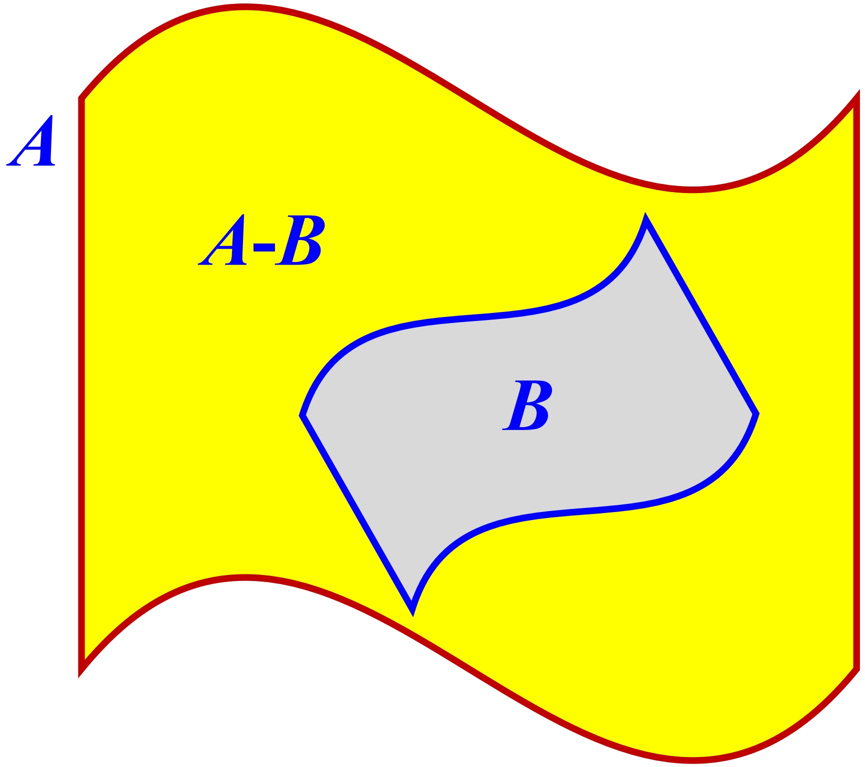
新主意（面積）：3/10



於是 A 的面積為：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(A) &= \mathcal{A}(A\text{-}B) + \mathcal{A}(B) \\
&= \mathcal{A}(A\text{-}B) + \rho^2\mathcal{A}(A) \\
&= \mathcal{A}(A\text{-}B) + \rho^2(\mathcal{A}(A\text{-}B)+\mathcal{A}(B)) \\
&= \mathcal{A}(A\text{-}B) + \rho^2\mathcal{A}(A\text{-}B)+\rho^2\mathcal{A}(B) \\
&= \mathcal{A}(A\text{-}B) + \rho^2\mathcal{A}(A\text{-}B)+\rho^4\mathcal{A}(A) \\
&\quad\cdots\cdots \\
&= \mathcal{A}(A\text{-}B) + \rho^2\mathcal{A}(A\text{-}B)+\rho^4\mathcal{A}(A\text{-}B) \\
&\qquad + \rho^6\mathcal{A}(A\text{-}B) + \rho^8\mathcal{A}(A\text{-}B) + \ldots \\
&\qquad + \rho^{2n}\mathcal{A}(A)
\end{aligned}
$$

新主意（面積）：4/10



1. 這樣我們就有了一道幾何級數：

$$\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(A\text{-}B) + \rho^2\mathcal{A}(A\text{-}B)+\rho^4\mathcal{A}(A\text{-}B)$$
$$+ \rho^6\mathcal{A}(A\text{-}B) + \rho^8\mathcal{A}(A\text{-}B) + \ldots$$
$$+ \rho^{2n}\mathcal{A}(A)$$

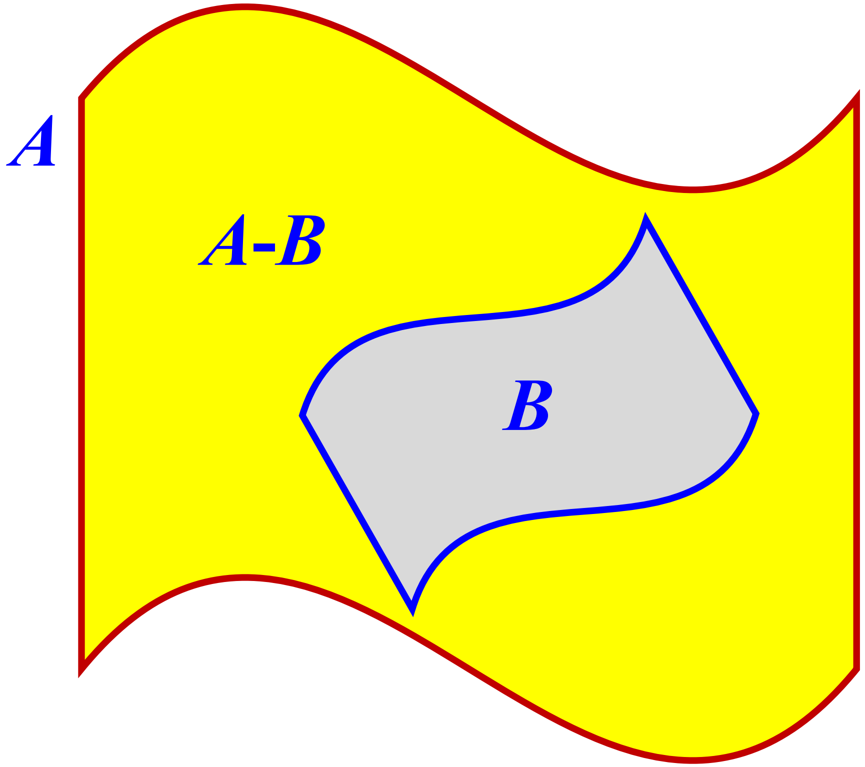
2. 當 n 趨於無很大時，上式變成：

$$\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(A\text{-}B) + \rho^2\mathcal{A}(A\text{-}B)+\rho^4\mathcal{A}(A\text{-}B)$$
$$+ \rho^6\mathcal{A}(A\text{-}B) + \rho^8\mathcal{A}(A\text{-}B) + \ldots$$

3. 這道幾何級數的結果是：

$$\mathcal{A}(A) = \frac{1}{1-\rho^2}\,\mathcal{A}(A\text{-}B)$$

新主意（面積）：5/10



1. 下面這道式子

$$\mathcal{A}(A) = \frac{1}{1-\rho^2}\ \mathcal{A}(A\text{-}B)$$

表示若我們知道比例因子 ρ 和 $\mathcal{A}(A\text{-}B)$，計算 A 的面積就很容易了。

2. 已知一個（多邊型的）幾何圖形 A，我們需要：

✓在 A 內找一個和 A 相似的 B

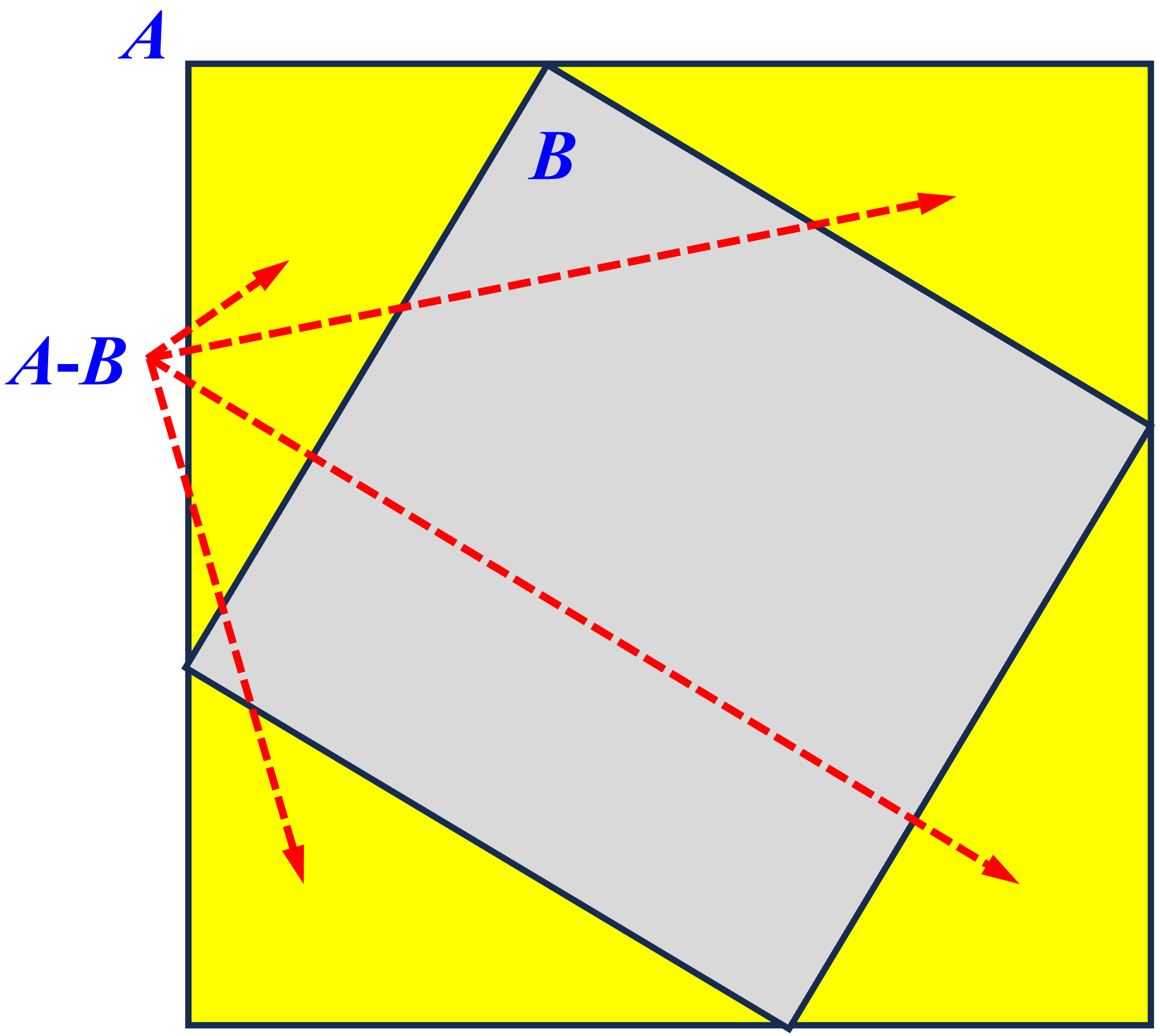
✓計算比例因子 ρ

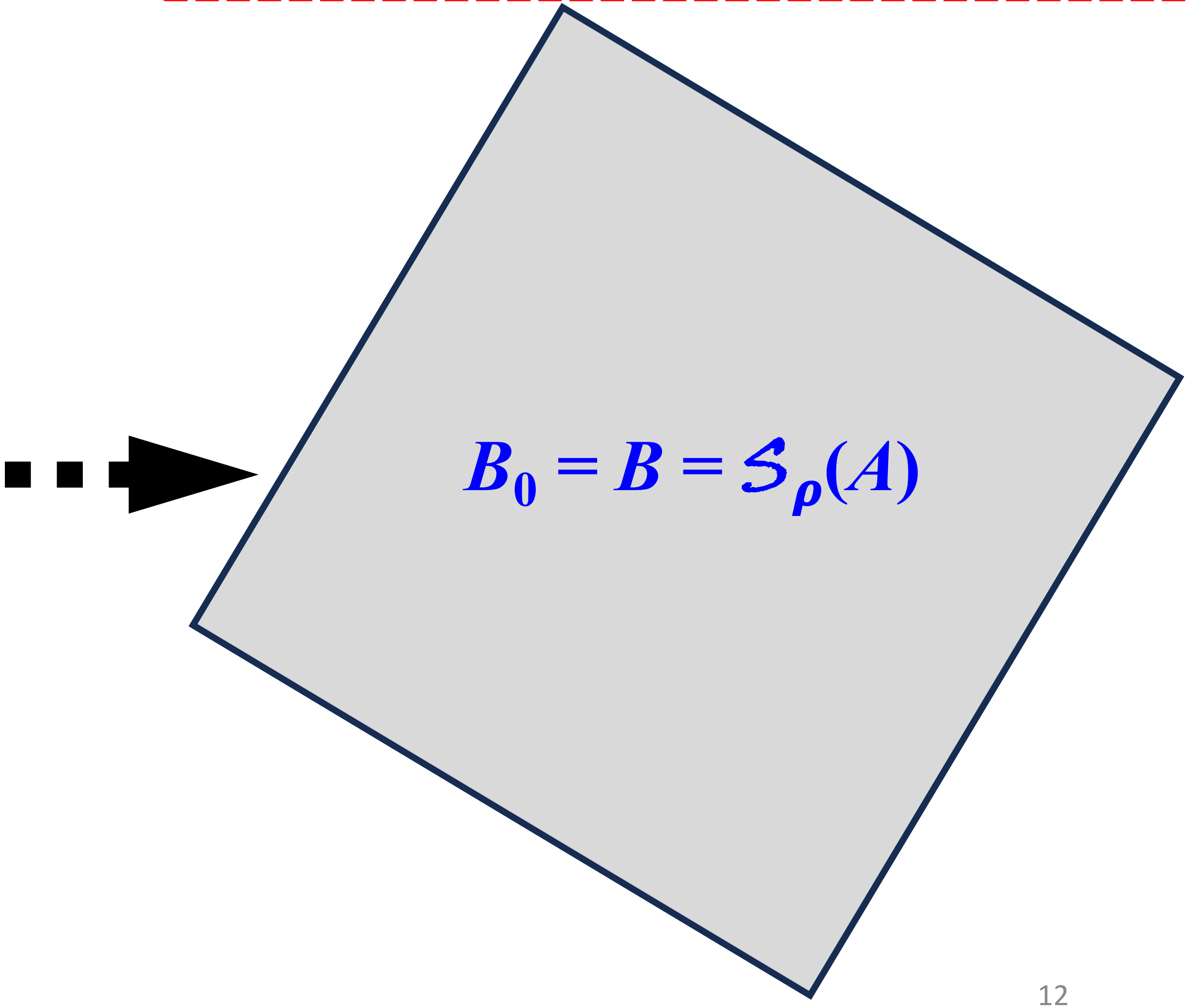
✓計算 $\mathcal{A}(A\text{-}B)$

於是就得到的面積 $\mathcal{A}(A)$ 。

新主意（面積）：6/10

$Y = \mathcal{S}_\rho(X)$：表示從 X 以比例因子 ρ 縮小到 Y



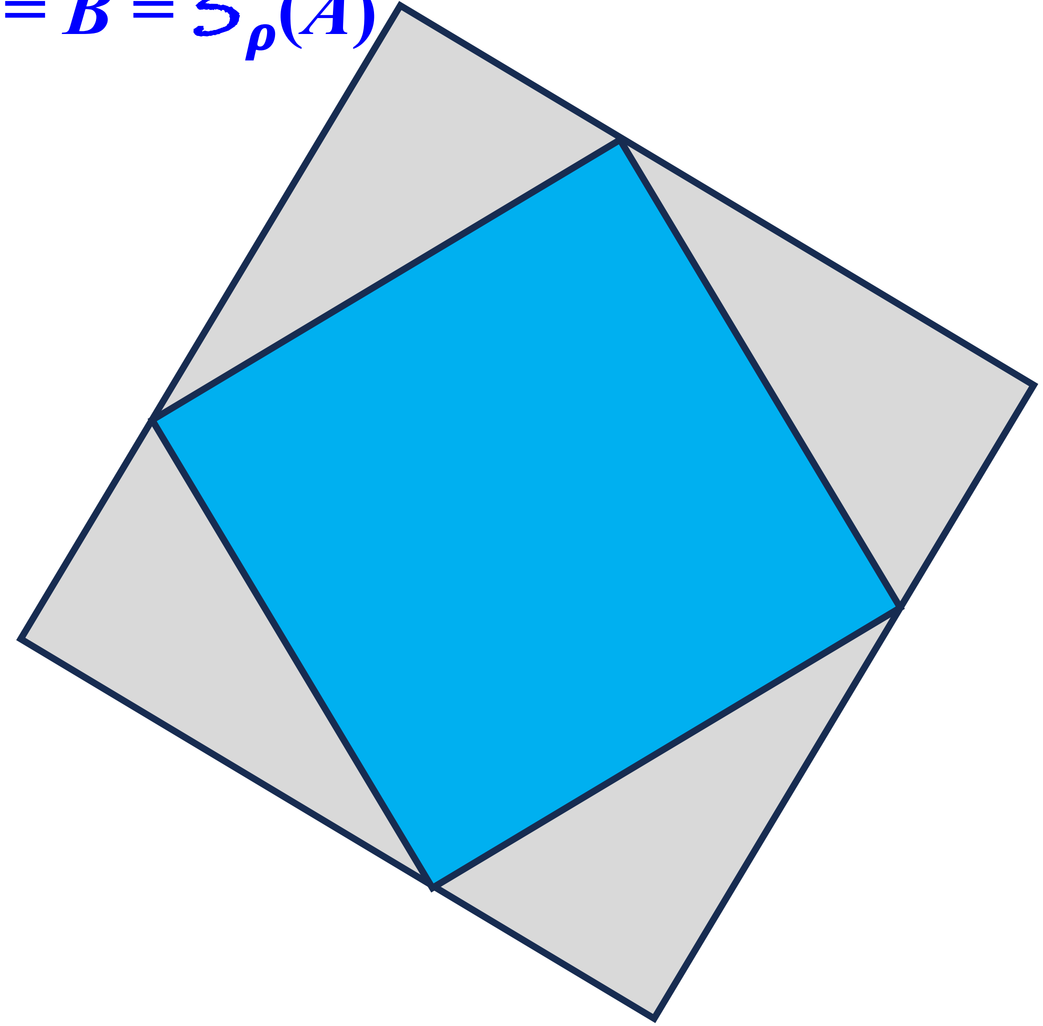


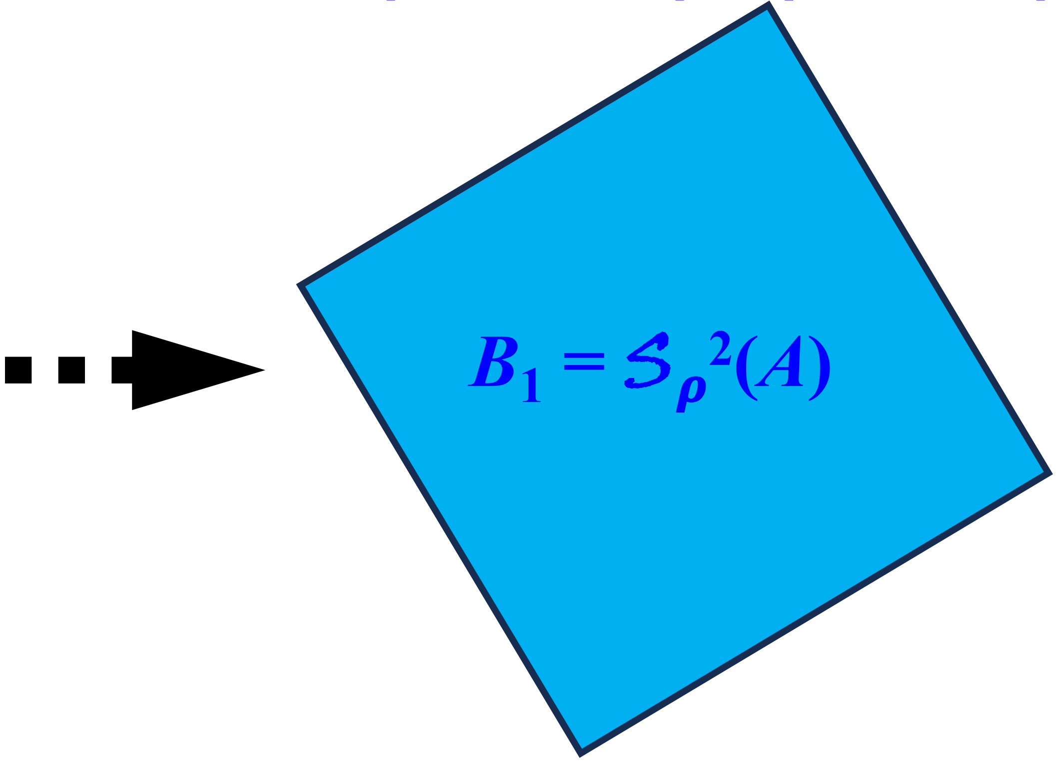
新主意（面積）：7/10

$Y = \mathcal{S}_\rho(X)$：表示從 X 以比例因子 ρ 縮小到 Y

$B_0 = B = \mathcal{S}_\rho(A)$

$B_1 = \mathcal{S}_\rho(B_0) = \mathcal{S}_\rho(\mathcal{S}_\rho(A)) = \mathcal{S}_\rho^{\,2}(A)$

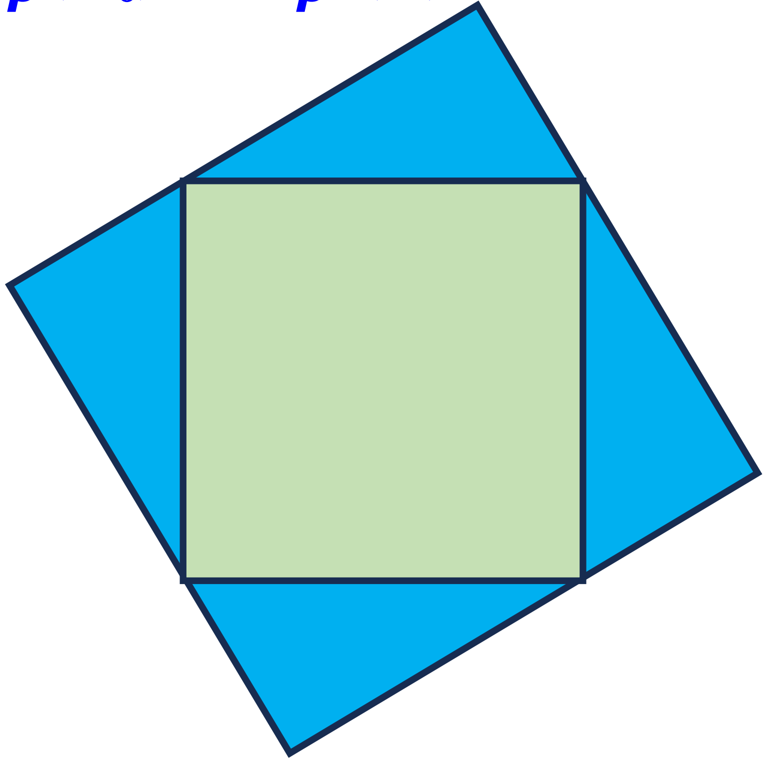




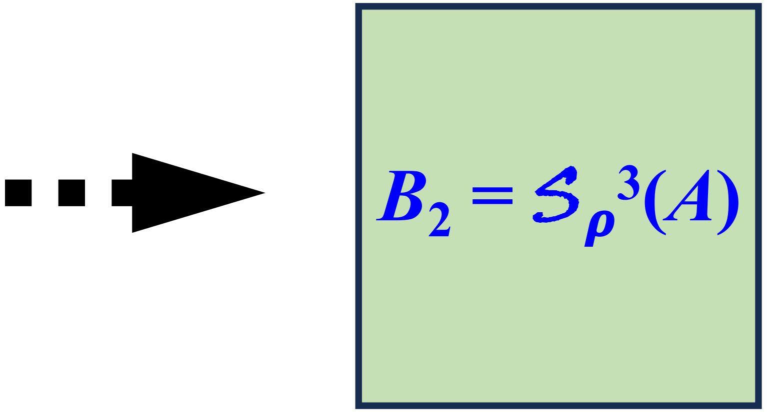
新主意（面積）：8/10

$Y = \mathcal{S}_\rho(X)$：表示從 X 以比例因子 ρ 縮小到 Y

$B_1 = \mathcal{S}_\rho(B_0) = \mathcal{S}_\rho{}^2(A)$



$B_2 = \mathcal{S}_\rho(B_1) = \mathcal{S}_\rho{}^2(B_0) = \mathcal{S}_\rho{}^3(A)))$

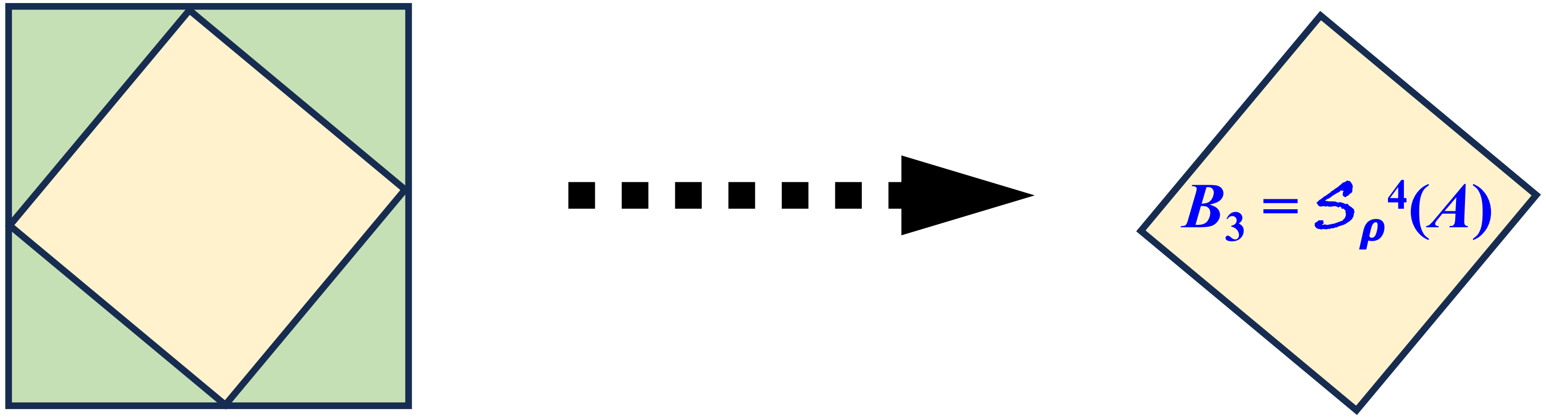


新主意（面積）：9/10

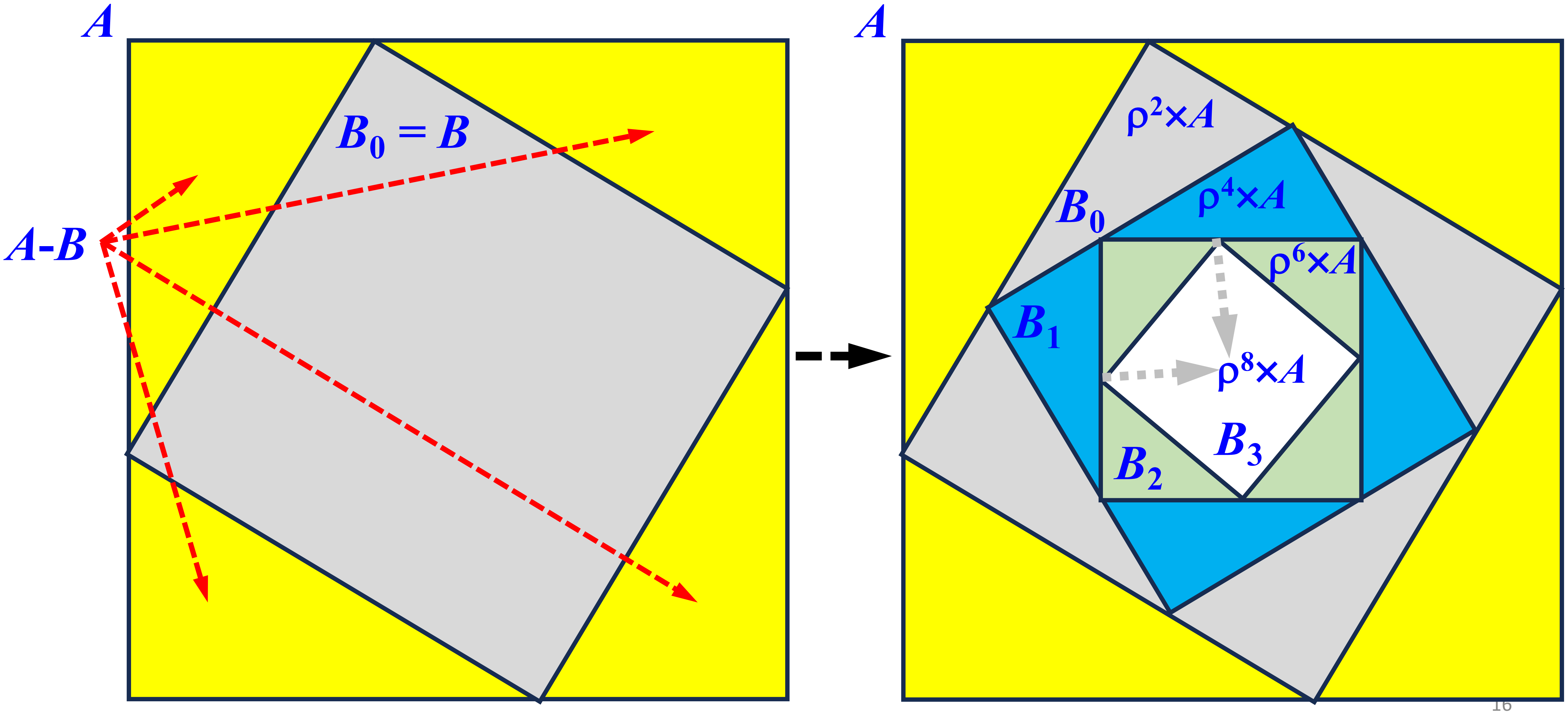
$Y = \mathcal{S}_\rho(X)$：表示從 X 以比例因子 ρ 縮小到 Y

$B_2 = \mathcal{S}_\rho{}^2(B_0)) = \mathcal{S}_\rho{}^3(A)$

$B_3 = \mathcal{S}_\rho(B_2) = \mathcal{S}_\rho{}^4(A)))$



新主意（面積）：10/10



A
$B_0 = B$
A-B
A
$\rho^2 \times A$
B_0
$\rho^4 \times A$
$\rho^6 \times A$
B_1
$\rho^8 \times A$
B_3
B_2

我們學到了什麼?

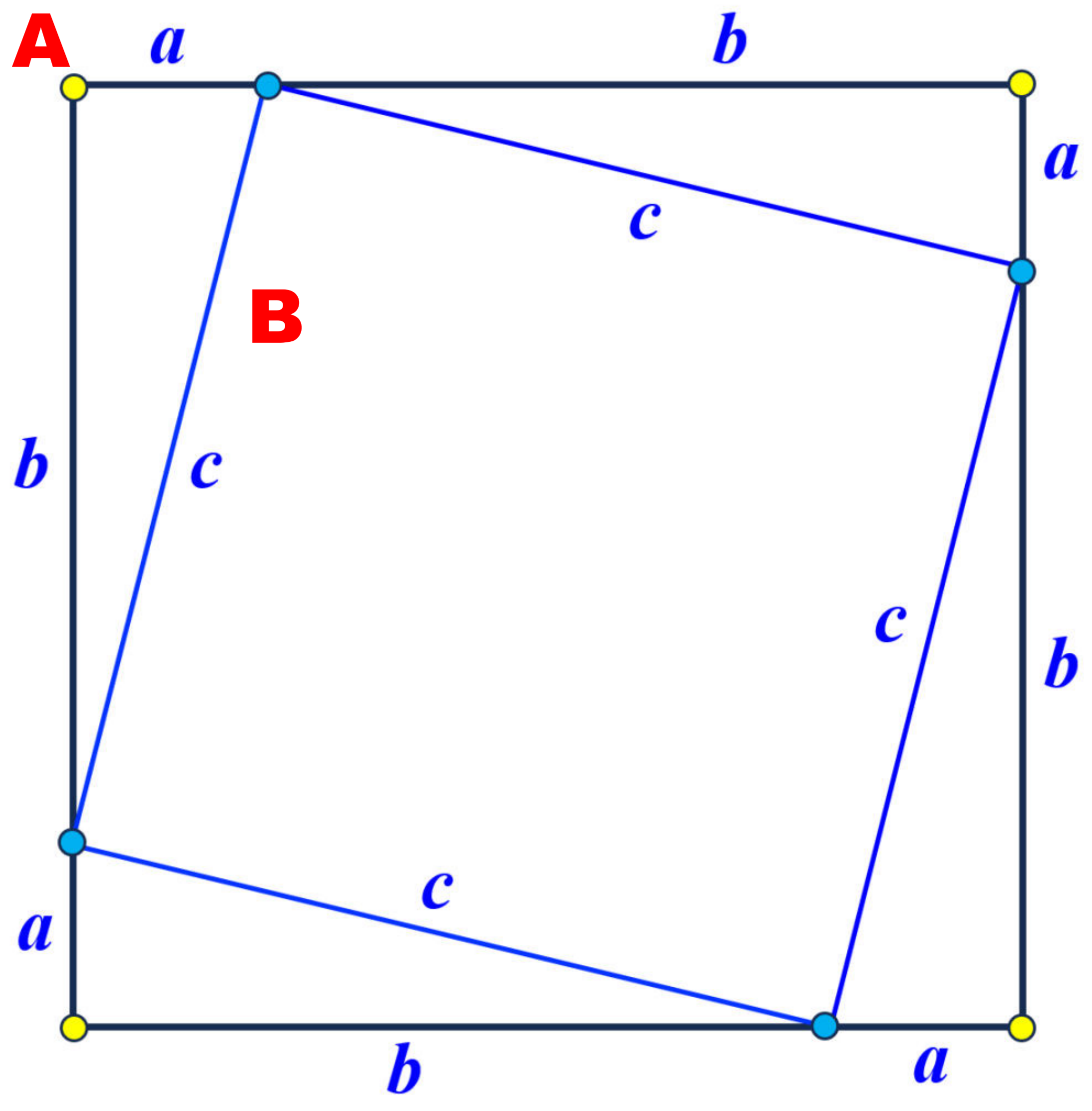
- 假設 XY 是一條線段、而 Z 是 XY 上的一個點，如果從 XY 縮到 ZY 的比例因子為 $\rho<1$ 、而且又知道 XZ 的長度，於是我們有：

$$\overline{XY}=\frac{1}{1-\rho}\cdot\overline{XZ}$$

- 假設 A 是一個多邊型的圖形而 B 是在內部和 A 相似的圖形，若從 A 縮小到 B 的比例因子為 $\rho<1$ 、又知道的 A-B 面積，於是 A 的面積為：

$$\text{Area}(A)=\frac{1}{1-\rho^2}\text{Area}(A-B)$$

六個例子



Loomis, Proof 33, p. 48

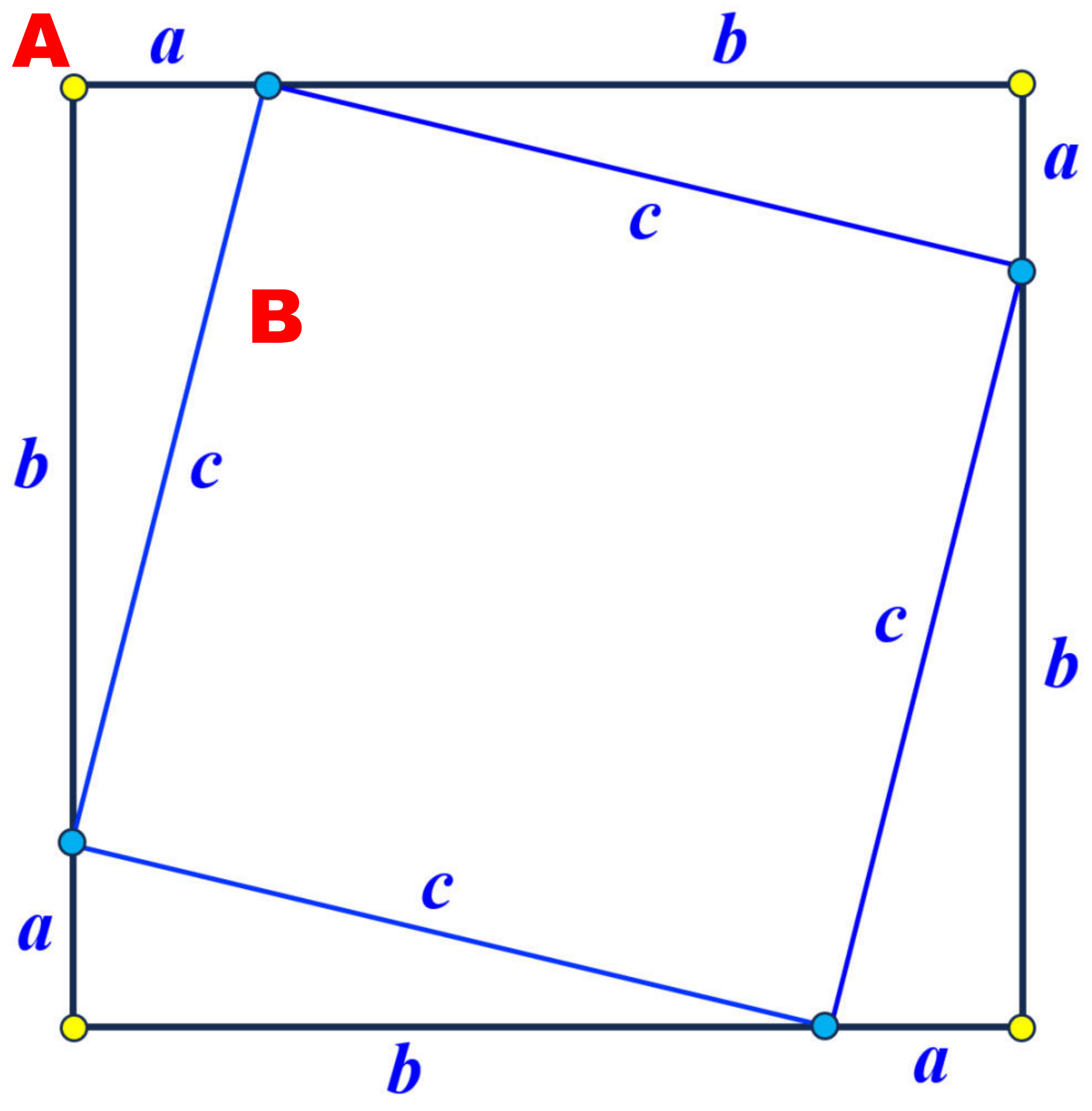
範例 1: 1/2

- 已知一個邊長為 a, b 和 c 的直角三角形（c 為斜邊）
- 作一個邊長為 $a+b$ 的正方形（左圖）
- 在內邊長為 c 的正方形和在外邊長為 $a+b$ 的正方形相似，於是比例因子為 $\rho = c/(a+b) < 1$ 、而且：

$$\frac{1}{1-\rho^2} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2 - c^2}$$

- A - B的面積為四個直角三角形面積的和：

$$4\left(\frac{a \times b}{2}\right) = 2(a \times b)$$



範例 1: 2/2

- 於是 A 的面積為

$$\frac{1}{1-\rho^2}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)^2-c^2}$$

$$2(a\times b)\boxed{\frac{(a+b)^2}{(a+b)^2-c^2}}$$

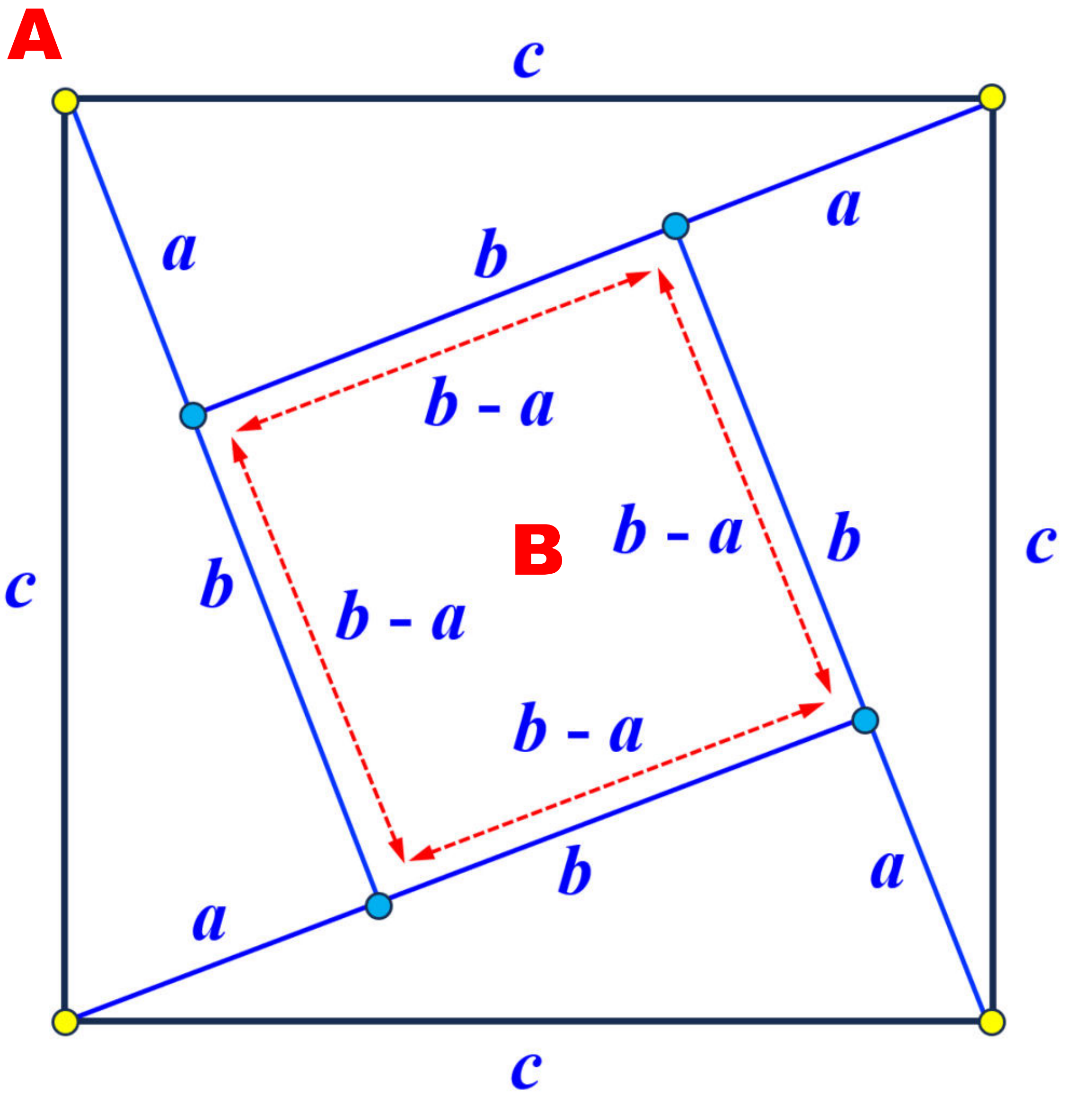
- 另一方面，因為在外的正方形面積為 $(a+b)^2$，這個面積必須和上面算出的相等：

$$\boxed{(a+b)^2}=2(a\times b)\frac{\boxed{(a+b)^2}}{(a+b)^2-c^2}$$

- 化簡後就得到結果

$$c^2=a^2+b^2$$

Loomis, Proof 33, p. 48



Loomis, Proof 215, p. 221

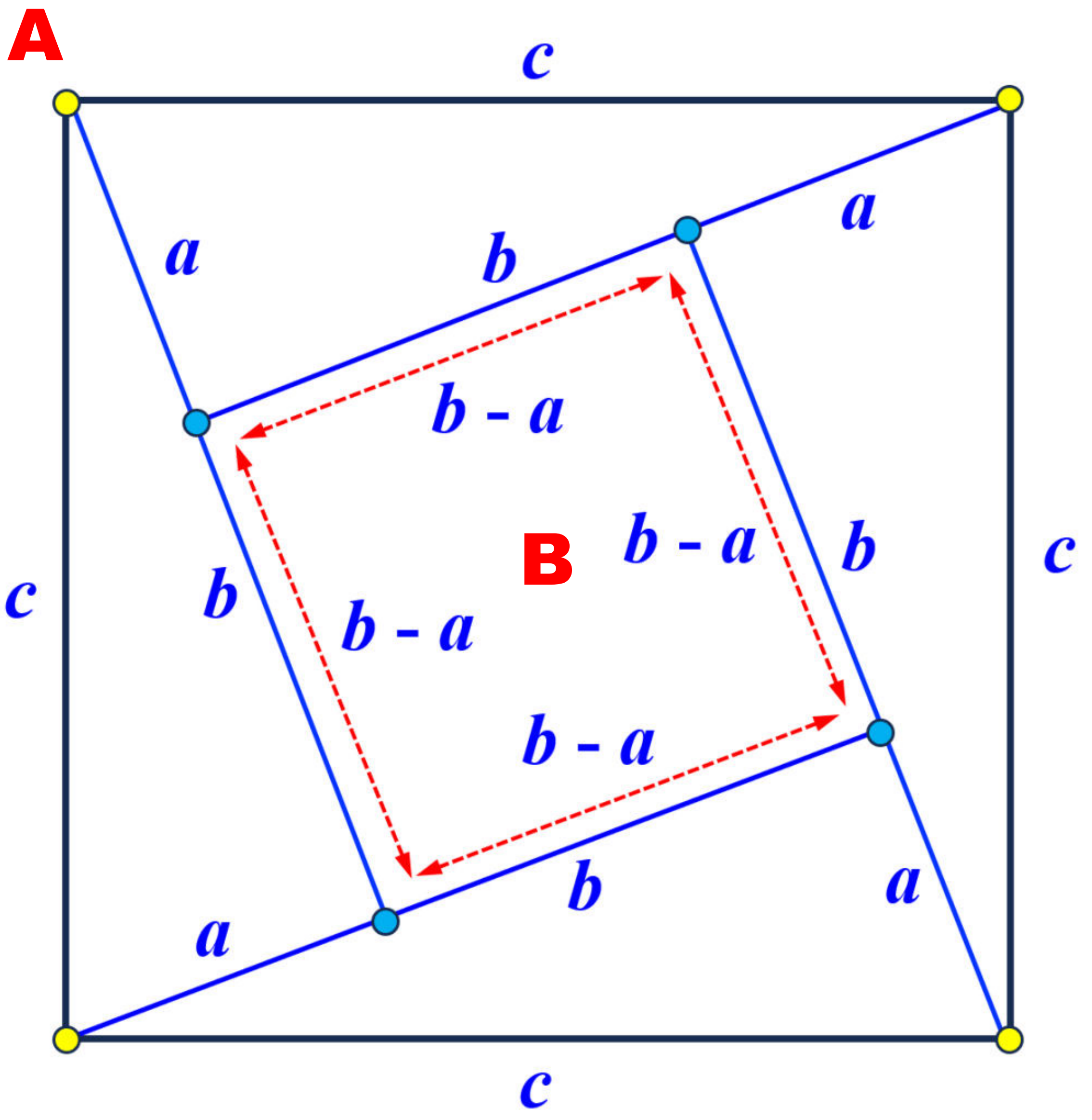
範例 2: 1/2

- 考慮一個邊長為 c 的正方形。
- 在每一條邊上作一個斜邊為 c 、直角邊為 a 與 b 的直角三角形。
- 於是在內的正方形邊長為 $b - a$ 。
- 比例因子為 $\rho = (b-a)/c$ 。
- 所以我們得到:

$$\frac{1}{1-\rho^2} = \boxed{\frac{c^2}{c^2-(b-a)^2}}$$

- 用新方法算出的外正方形面積為:

$$4\left(\frac{a\times b}{2}\right)\times\boxed{\frac{c^2}{c^2-(b-a)^2}}$$



Loomis, Proof 215, p. 221

範例 2: 2/2

- 很明顯地，外正方形的面積是 c^2。
- 兩者必須相等：

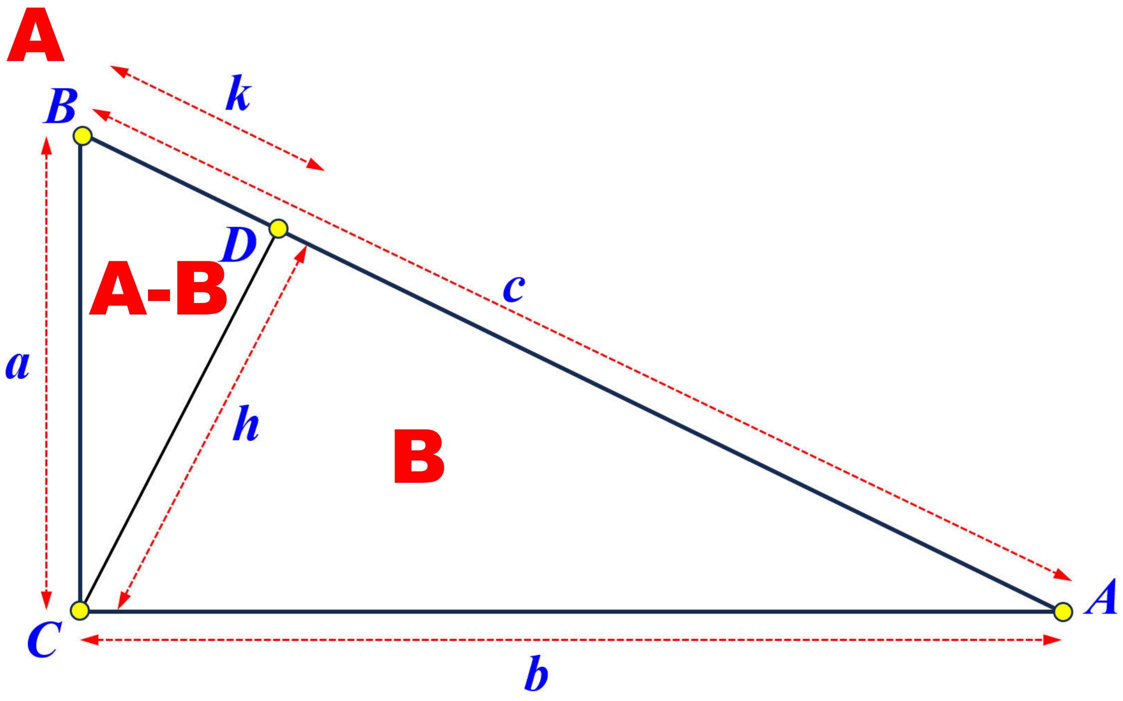
$$\boxed{c^2} = 4\left(\frac{a \times b}{2}\right) \times \frac{\boxed{c^2}}{c^2 - (b-a)^2}$$

- 化簡得到：

$$c^2 - (b-a)^2 = 2a \times b$$

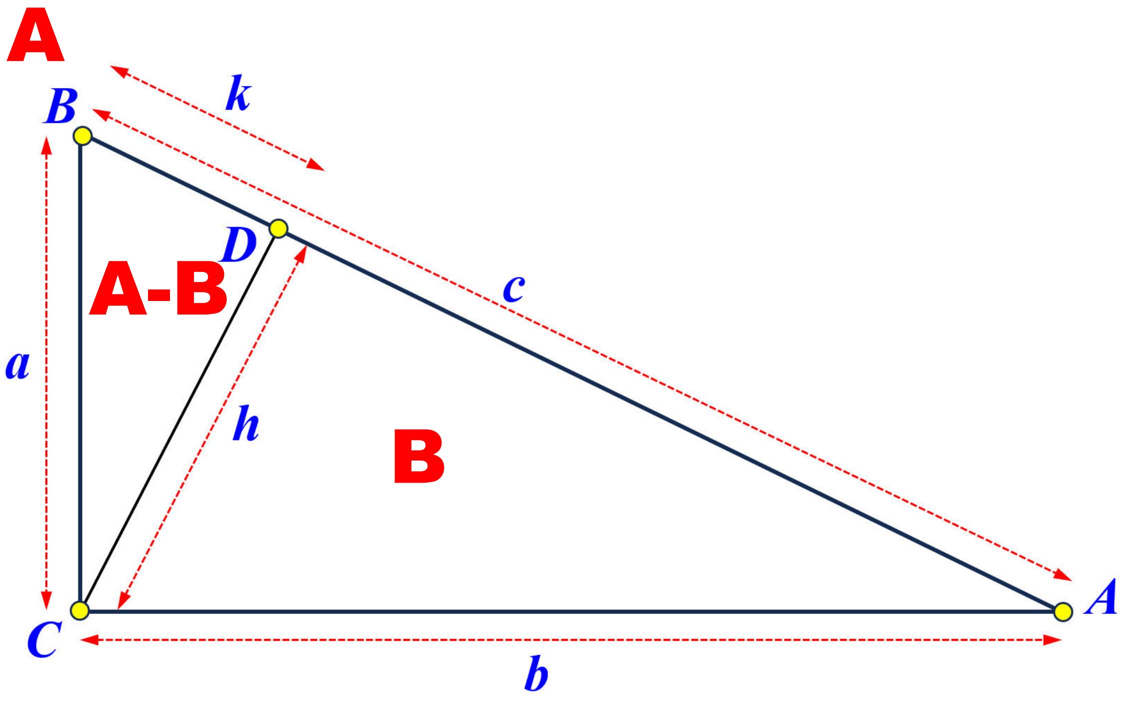
- 最後我們有 $a^2 + b^2 = c^2$。

範例 3: 1/3



- 仍然考慮一個邊長為 a, b 和 c（斜邊）的直角三角形。
- 令從 C 到 AB 的垂足為 D 。
- 令 CD 和 BD 的長分別是 h 和 k 。
- 因為 $\Delta ACD \sim \Delta ABC$， **B** 是 ΔACD 而 **A – B** 則是 ΔBCD。
- 所以，比例因子為 $\rho = h/a$!

Loomis, Proof 1, p. 23



範例 3: 2/3

- 用 a、b 和 c 表示 h 和 k。
- 因為 $\Delta CBD \sim \Delta ABC$，得到 $h/b = a/c$ 和 $k/a = a/c$。於是：

$$h = \frac{a \times b}{c} \quad \text{和} \quad k = \frac{a^2}{c}$$

- 所以 $\rho = h/a = b/c$，而且

$$\frac{1}{1-\rho^2} = \frac{c^2}{c^2-b^2}$$

- ΔCBD 的面積是 $(h \times k)/2$：

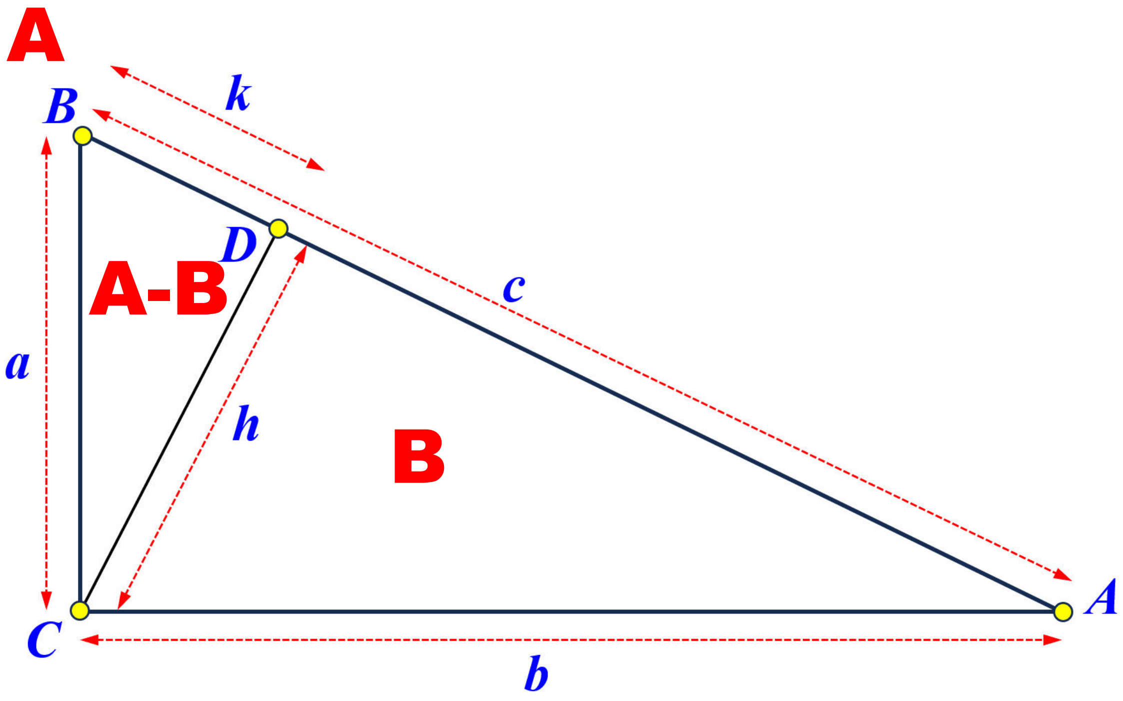
$$\text{Area}(\Delta CBD) = \frac{h \times k}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a \times b}{c}\right)\left(\frac{a^2}{c}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 b}{c^2}$$

- 用此地的方式，ΔABC 的面積為

$$\frac{1}{1-\rho^2} \cdot \text{Area}(\Delta CBD) = \frac{\boxed{c^2}}{c^2-b^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 b}{\boxed{c^2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 b}{c^2-b^2}$$

Loomis, Proof 1, p. 23

範例 3: 3/3



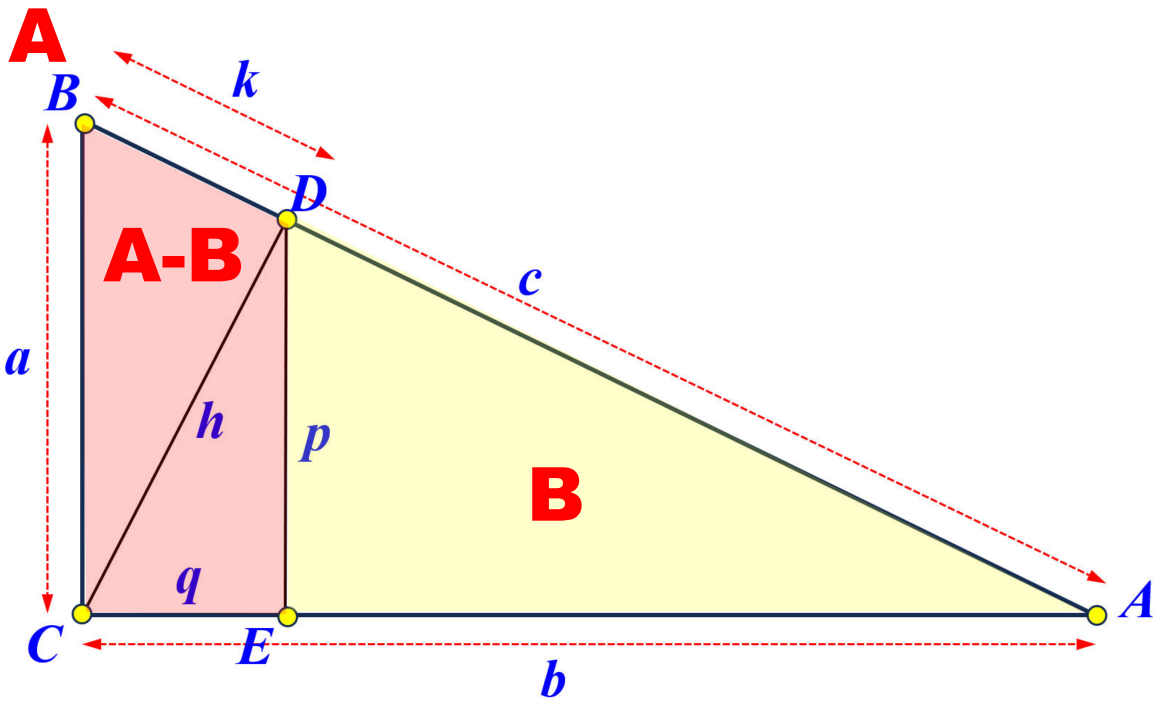
- 三角形 ΔABC 的面積也是 $(a \times b)/2$。
- 兩者的結果相同：

$$\frac{a \cdot b}{2} = \text{Area}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 b}{c^2 - b^2}$$

- 化簡後得到：

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Loomis, Proof 1, p. 23

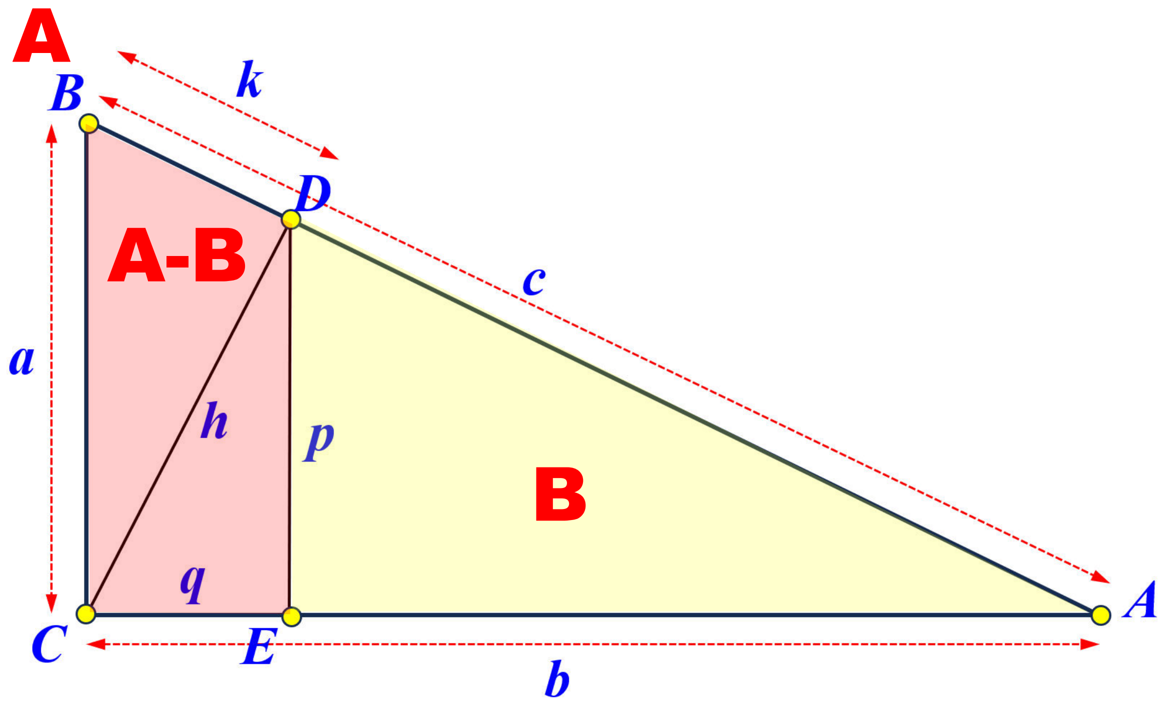


範例 4: 1/3

- 繼續上一題。
- 令從 D 到 AC 的垂足為 E，而且用 p 表示 DE 的長。
- 我們有 $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ 以及 $\rho = p/a$ 。
- 因為 $\Delta CDE \sim \Delta ABC$, $p/h=b/c$以及 $p = h(b/c)$。因為 $h=(a\times b)/c$，我們有
$$p = \frac{ab^2}{c^2}$$
- 從 $q/p = a/b$ 得到 $q = p \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{ab^2}{c^2}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^2 b}{c^2}$
- 而且 $\rho = \frac{p}{a} = \frac{\left(\frac{ab^2}{c^2}\right)}{a} = \frac{b^2}{c^2}$

John Arioni, Cut the Knot

範例 4: 2/3



- 所以，我們有：

$$\frac{1}{1-\rho^2}=\frac{c^4}{c^4-b^4}=\frac{c^4}{(c^2-b^2)(c^2+b^2)}$$

- 於是 **A-B** 就是梯形 ***BCED*** 的面積

$$\text{Area}(BCED)=\frac{1}{2}(a+p)\times q=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a\times b^2}{c^2}\right)\left(\frac{a^2\times b}{c^2}\right)$$

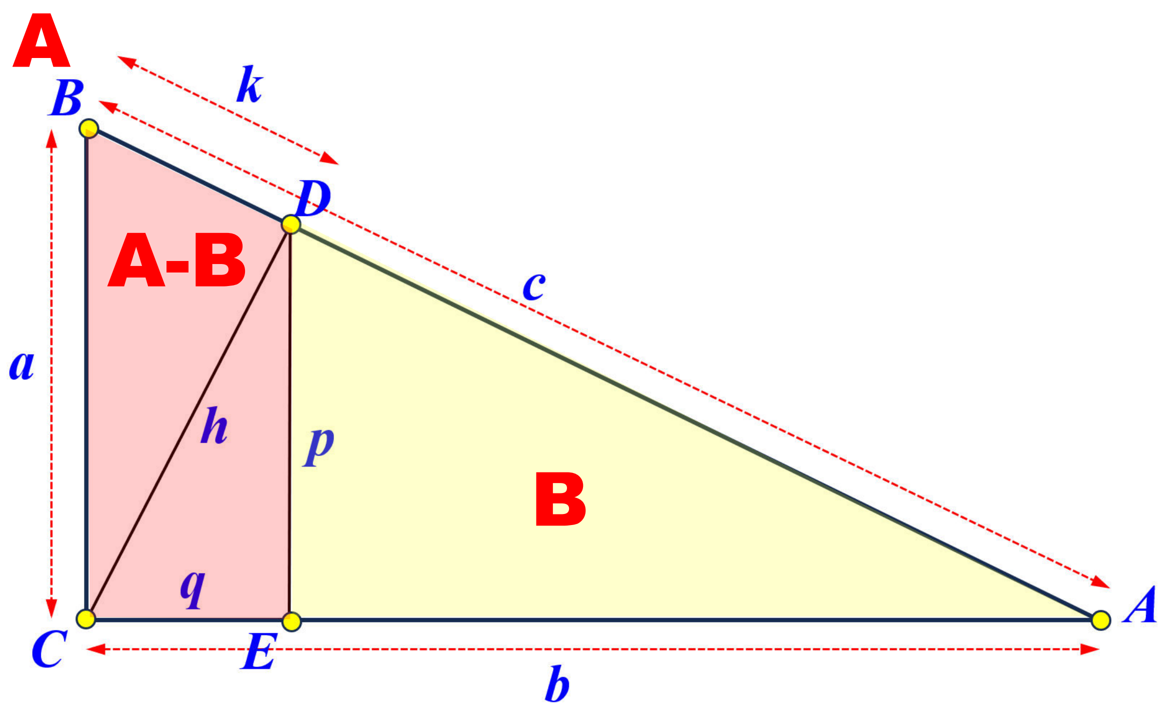
$$=\frac{a^3b}{2c^4}(b^2+c^2)$$

- ΔABC 的面積是：

$$\text{Area}(\Delta ABC)=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{a^3b}{2c^4}(b^2+c^2)\right]=\frac{\boxed{c^4}}{(c^2-b^2)\boxed{(c^2+b^2)}}\cdot\left[\frac{a^3b}{2\boxed{c^4}}\boxed{(b^2+c^2)}\right]$$

$$=\frac{a^3b}{2(c^2-b^2)}$$

範例 4: 3/3

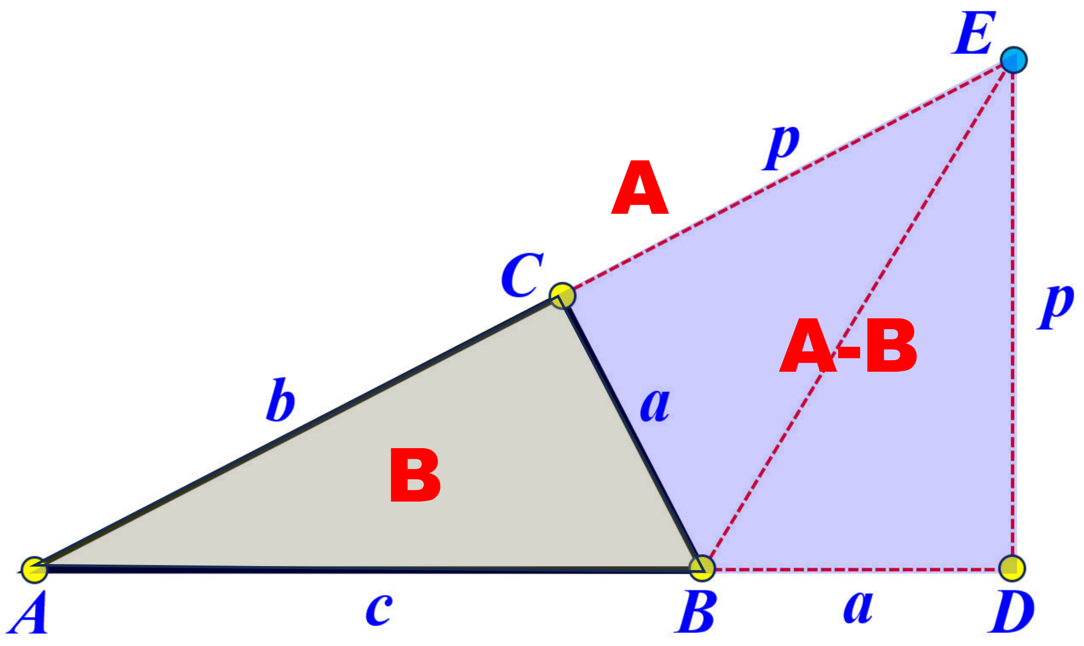


- ΔABC 的面積也是 $(a\times b)/2$ 。
- 兩種算法的結果必須相同：

$$\frac{a^3b}{2(c^2-b^2)} = \text{Area}(\Delta ABC) = \frac{a\cdot b}{2}$$

- 化簡後得到 $c^2 = a^2 + b^2$.

這個解法相當於使用上一個解法兩次，第一次得到 ΔACD，再從 ΔACD 縮小到 ΔADE。

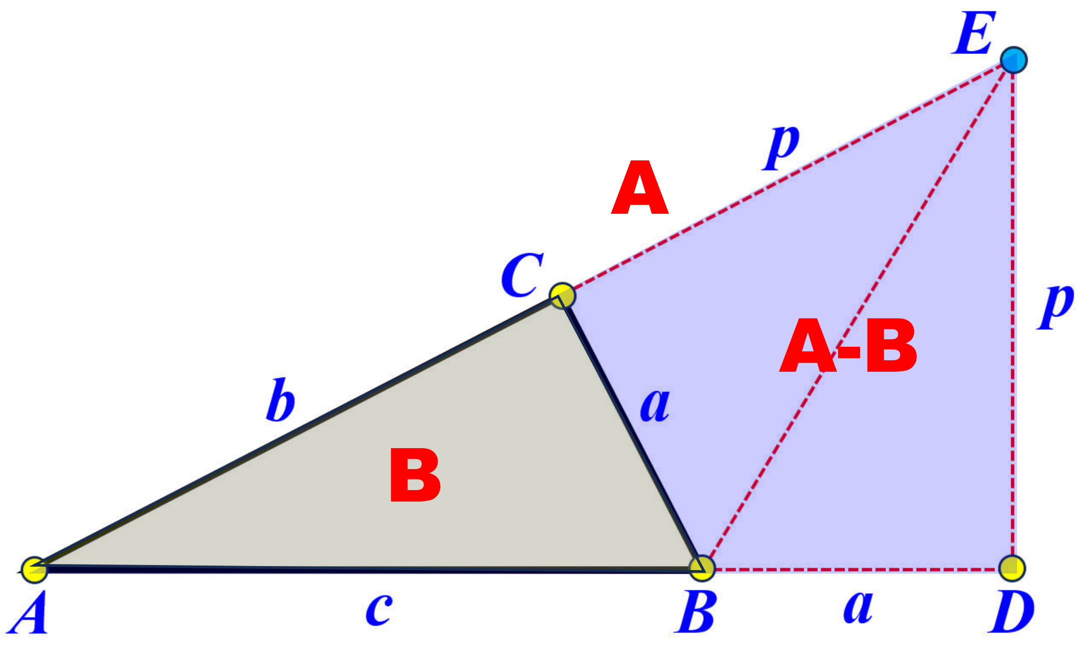


範例 5: 1/3

- 把邊 AB 延長到 D 使得 $BD = a$。
- 從 D 作 AB 的垂線和 AC 交於 E。
- 因為 ΔEDB 和 ΔECB 全等，於是

  $p = AD = AC$。
- 現在 **A** 是 ΔADE、 **B** 是 ΔACB 而 **A-B** 是四邊形 $CBDE$ 。
- 當然 $\rho = a/p$！
- 四邊形 $CBDE$ 的面積是三角形 ΔEBD 面積的兩倍。

Loomis, Proof 4, p. 26



範例 5: 2/3

- 因為 $\Delta ADE \sim \Delta ACB$，得到 $a/p = b/(a+c)$ 和 $p = (a/b)(a+c)$ 。
- 所以， $\rho = a/p$ 就是

$$\rho = \frac{a}{p} = \frac{a}{\frac{a}{b}\cdot(a+c)} = \frac{b}{a+c}$$

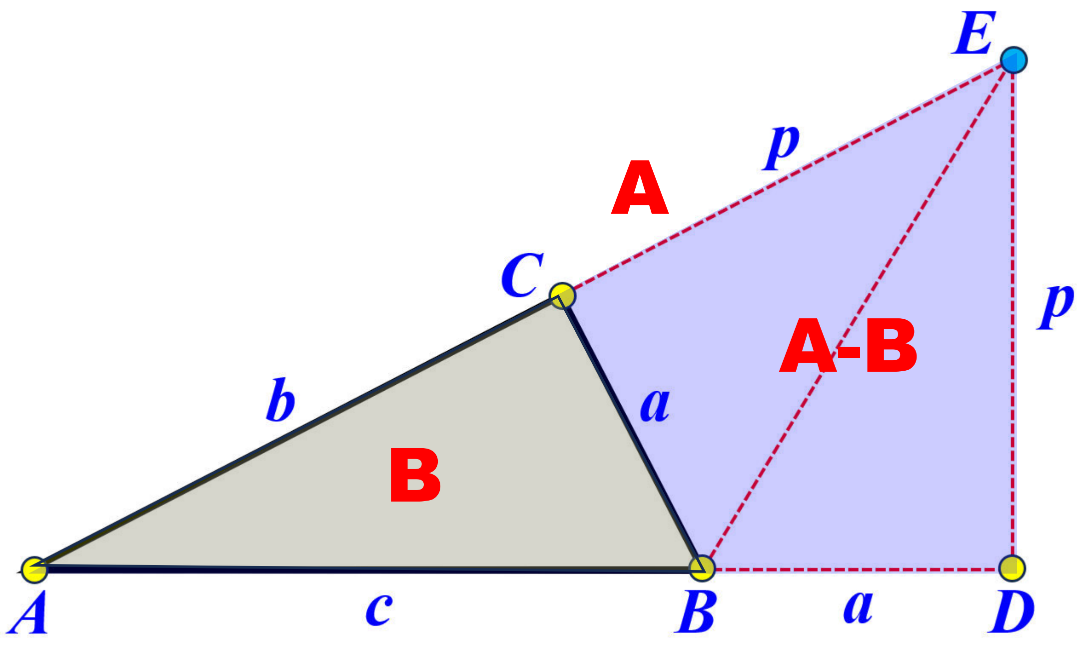
- 因此有下式：

$$\frac{1}{1-\rho^2} = \frac{(a+c)^2}{(a+c)^2 - b^2}$$

- 四邊形 $CBDE$ 的面積是：

$$\text{Area}(CBDE) = 2\left(\frac{a\times p}{2}\right) = a\times p = a\left(\frac{a}{b}(a+c)\right) = \frac{a^2(a+c)}{b}$$

Loomis, Proof 4, p. 26



範例 5: 3/3

- 用新方法算出的 ΔADE 面積為：

$$\text{Area}(\Delta ADE)=\frac{1}{1-\rho^2}\text{Area}(CBDE)$$
$$=\left(\frac{(a+c)^2}{(a+c)^2-b^2}\right)\left(\frac{a^2(a+c)}{b}\right)=\frac{a^2(a+c)^3}{b\left[(a+c)^2-b^2\right]}$$

- ΔADE 的面積也可以這樣算：

$$\text{Area}(\Delta ADE)=\frac{1}{2}(a+c)\times p=\frac{1}{2}\cdot\frac{a(a+c)^2}{b}$$

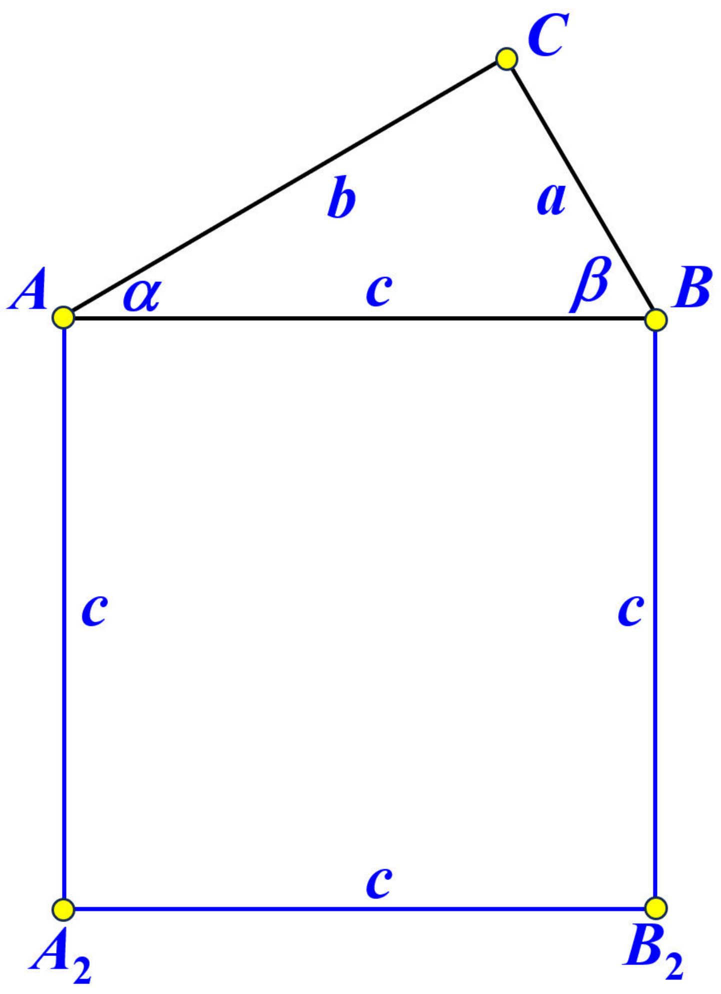
- 這兩個結果必須一致：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a(a+c)^2}{b}=\frac{a^2(a+c)^3}{b\left[(a+c)^2-b^2\right]}$$

reduces to $a(a+c)=a^2+ac$

- 化簡後就有 $c^2=a^2+b^2$。

Loomis, Proof 4, p. 26

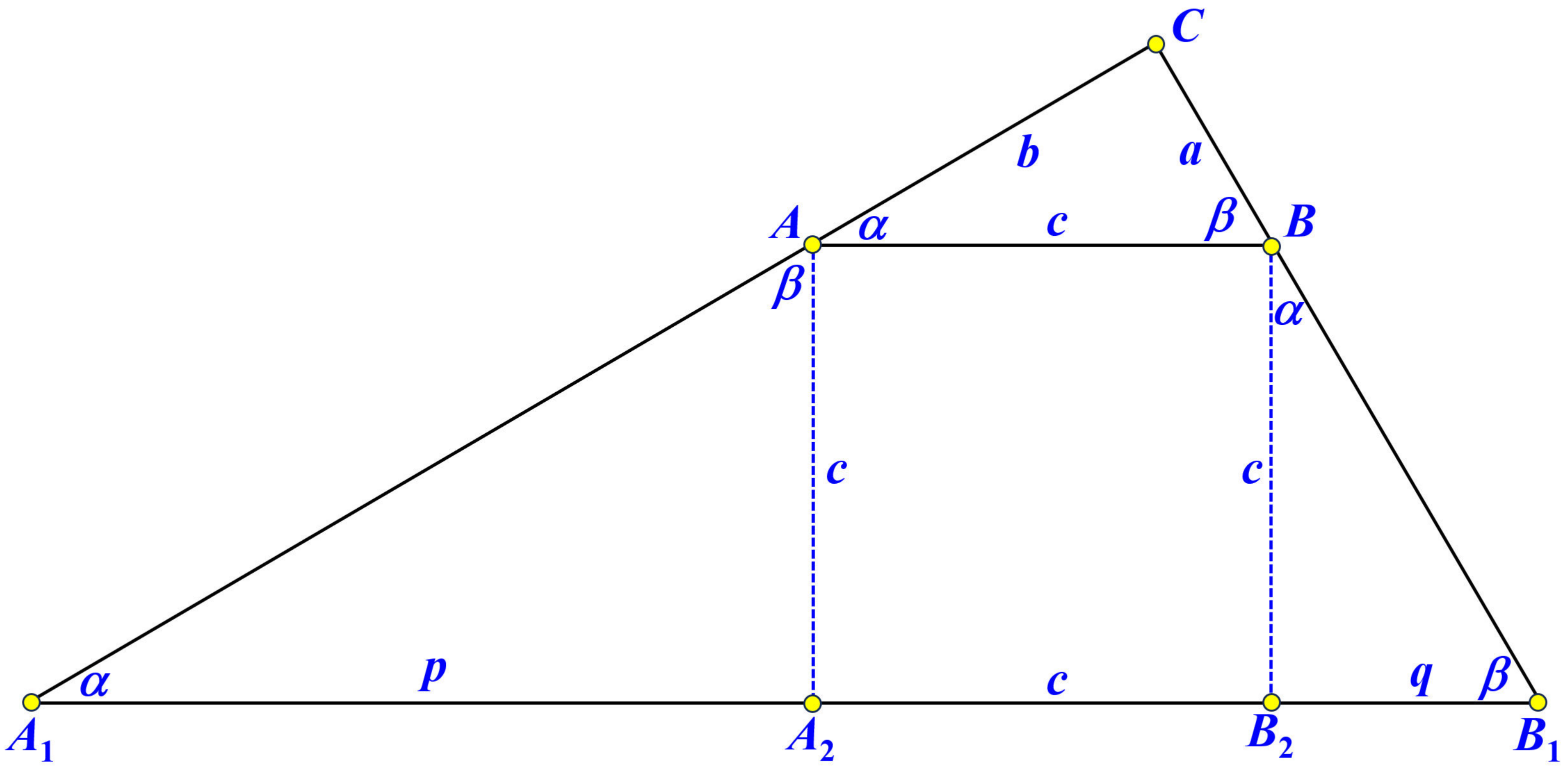


範例 6: 1/6

- 直角 ΔABC 三角形的邊長為 a、b 和 c，並且 $\angle C = 90°$。
- 在斜邊 AB 上作一個邊長為 c 的正方形。
- 令這個正方形為ABB_2A_2。

Loomis, Proof 18, p. 43

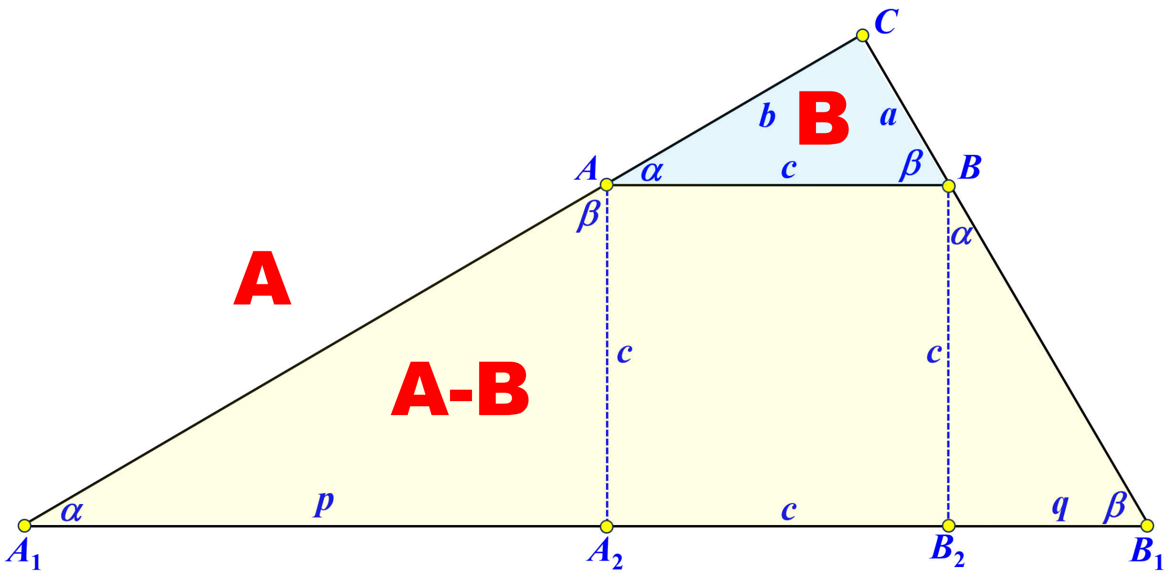
範例 6: 2/6



- 延長邊AC、 CB 和 A_2B_2 得到另一個直角三角形ΔA_1B_1C。
- 不難看出 $\angle A_1 = \angle A = \alpha$ 和 $\angle B_1 = \angle B = \beta$。
- 因為 $\alpha+\beta=90°$，我們有 $\angle A_1AA_2 = \angle BB_1B_2 = \beta$。
- 用 p 和 q 分別表示線段 A_1A_2 和線段 B_1B_2 的長度。

Loomis, Proof 18, p. 43

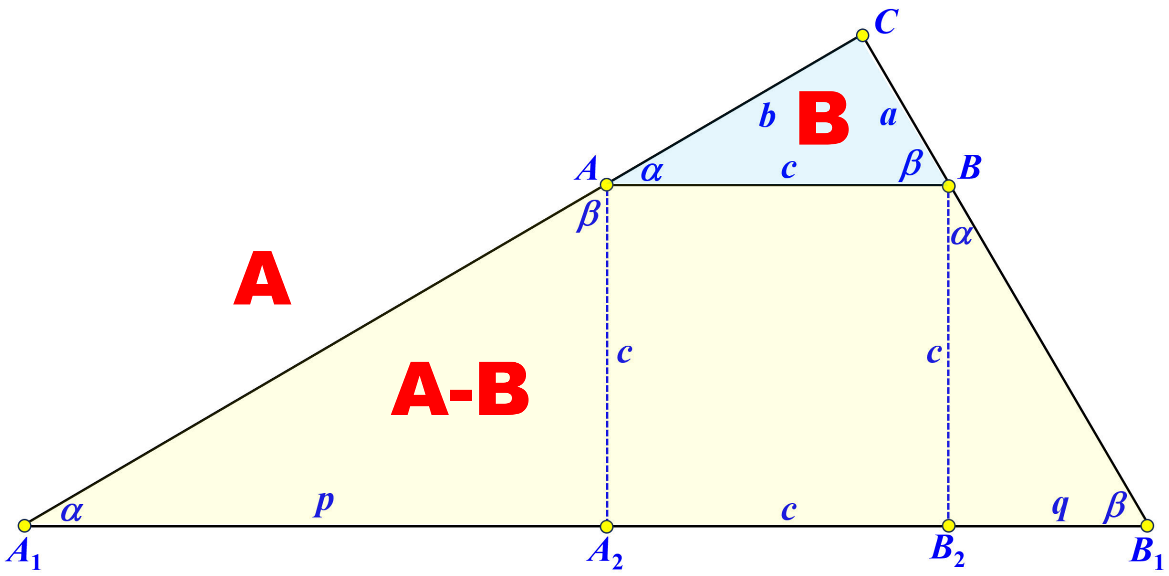
範例 6: 3/6



- 因為 ΔABC 和 ΔA_1B_1C 相似，我們可以用梯形 ABB_1A_1 的面積算出 ΔA_1B_1C 的面積。
- 所以， **A** 是 ΔA_1B_1C、 **B** 是 ΔABC 、而 **A-B** 就是梯形 ABB_1A_1。
- 因此，我們得算出梯形 ABB_1A_1 的面積以及 $\rho = c/(p+c+q)$。

Loomis, Proof 18, p. 43

範例 6: 4/6



- 因為 ΔA_1AA_2 和 ΔABC 相似，我們得到 $p/c = b/a$ 和 $\underline{p = (b\times c)/a}$。
- 因為 ΔBB_1B_2 和 ΔABC相似，我們得到 $q/c = a/b$ 和 $\underline{q = (a\times c)/b}$。
- A_1B_1 的邊長為：

$$p+c+q=\frac{b\cdot c}{a}+c+\frac{a\cdot c}{b}=\frac{c}{a\cdot b}\left(ab+a^2+b^2\right)$$

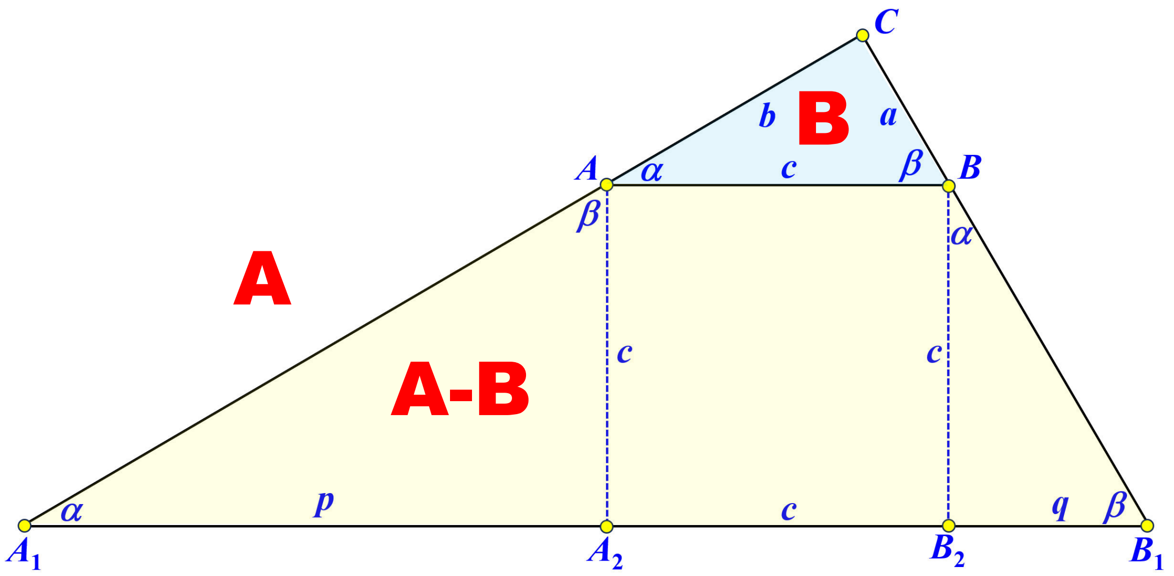
- 最後，梯形 ABB_1A_1 的面積為：

$$\text{Area}(ABB_1A_1)=\frac{1}{2}\left(c+(p+c+q)\right)\times c=\frac{1}{2}\left(c+\frac{c}{a\cdot b}\left(ab+a^2+b^2\right)\right)\times c$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{a\cdot b}(a+b)^2$$

Loomis, Proof 18, p. 43

範例 6: 5/6



- 比例因子 ρ 就是

$$\rho = \frac{c}{p+c+q} = \frac{c}{\frac{c}{ab}\left(ab+a^2+b^2\right)} = \frac{ab}{ab+a^2+b^2}$$

- 1/(1-ρ²) 的結果為：

$$\frac{1}{1-\rho^2} = \frac{\left(ab+a^2+b^2\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)(a+b)^2}$$

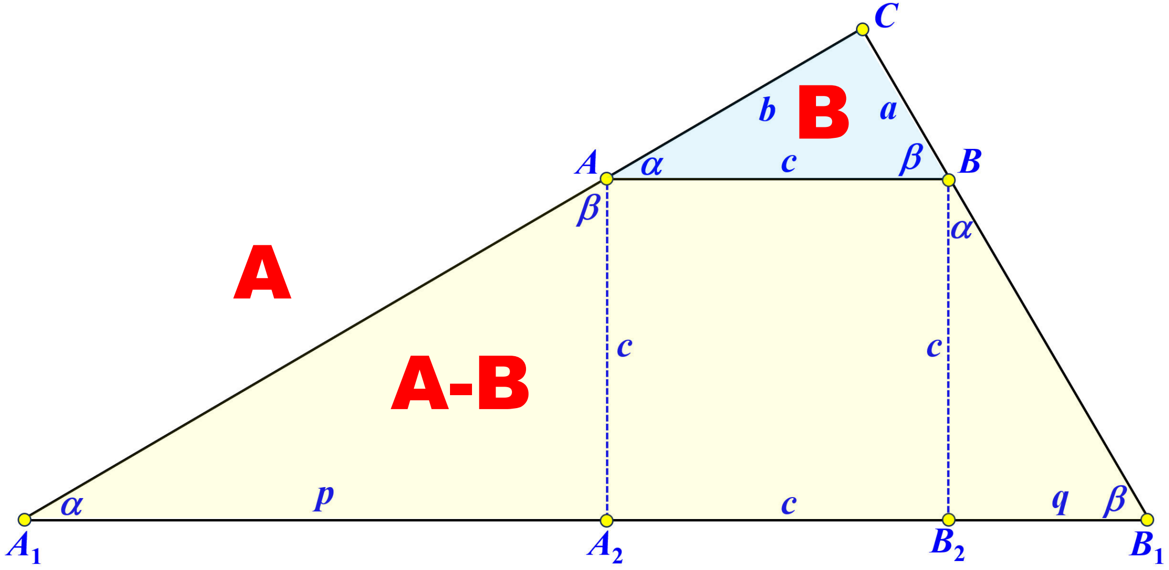
- 最後， ΔA_1B_1C 的面積為：

$$\text{Area}(\Delta A_1B_1C) = \frac{1}{1-\rho^2}\text{Area}(ABB_1A_1) = \left[\frac{\left(ab+a^2+b^2\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)\boxed{(a+b)^2}}\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{ab}\boxed{(a+b)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{ab}\cdot\frac{\left(ab+a^2+b^2\right)^2}{a^2+b^2}$$

Loomis, Proof 18, p. 43

範例 6: 6/6



- 接著我們用另一個方法求面積。我們需要知道 CA_1 和 CB_1 的長。
- 因為從 ΔA_1B_1C 縮小到 ΔABC 的比例因子為 $\rho = (ab)/(ab+a^2+b^2)$， CA_1 就是 b/ρ 而且 $CB_1 = a/\rho$。這樣我們得到：

$$\text{Area}(CA_1B_1) = \frac{1}{2}\overline{CA_1}\times\overline{CB_1} = \frac{1}{2}\frac{a\cdot b}{\rho^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(ab+a^2+b^2\right)^2}{ab}$$

- 兩個結果必須相同：

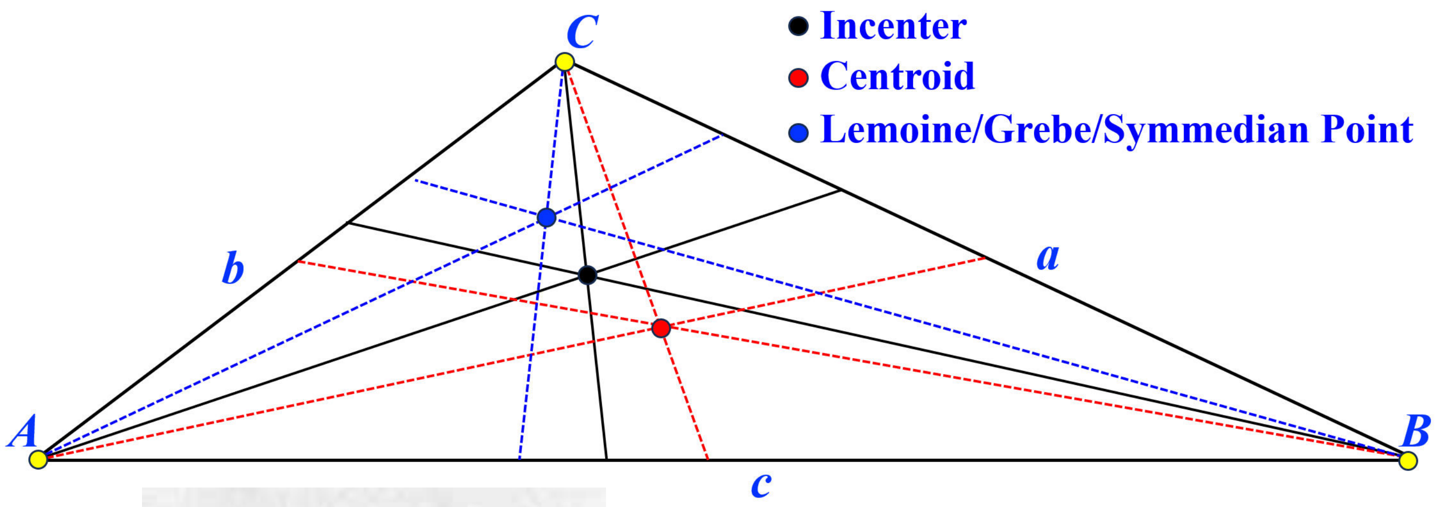
$$\boxed{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\boxed{\left(ab+a^2+b^2\right)^2}}{\boxed{ab}} = \boxed{\frac{1}{2}}\cdot\frac{c^2\boxed{\left(ab+a^2+b^2\right)^2}}{\boxed{ab}\left(a^2+b^2\right)}$$

- 很明顯地，我們得到 $a^2 + b^2 = c^2$。

Loomis, Proof 18, p. 43

幾個可能是新的證明

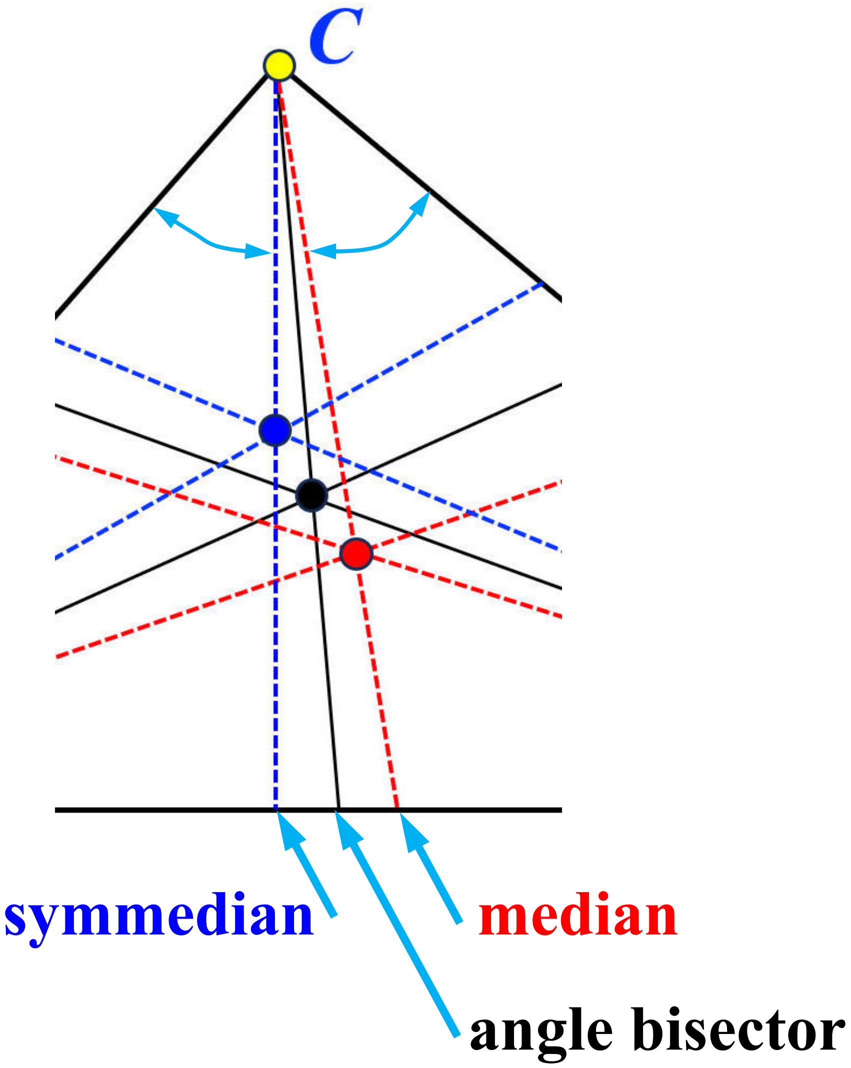
Lemoine/Grebe/Symmedian點: 1/8



Émile Lemoine (1840—1912)

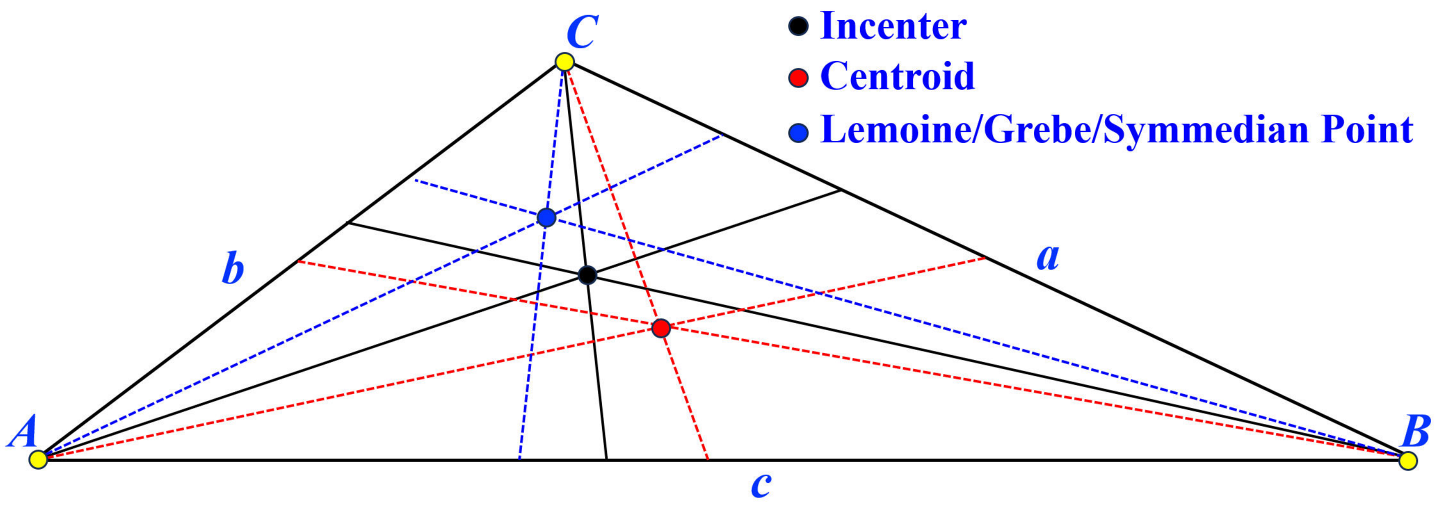
- ΔABC 是一個三角形。
- 三角形的**內心**（*incenter*）是三個**角平分線**的交點。
- 三角形的**重心**（*centroid*）是三條**中線**（*median*）的交點；**中線**是從某頂點到該頂點對邊中點的連線。

Lemoine/Grebe/Symmedian點: 2/8



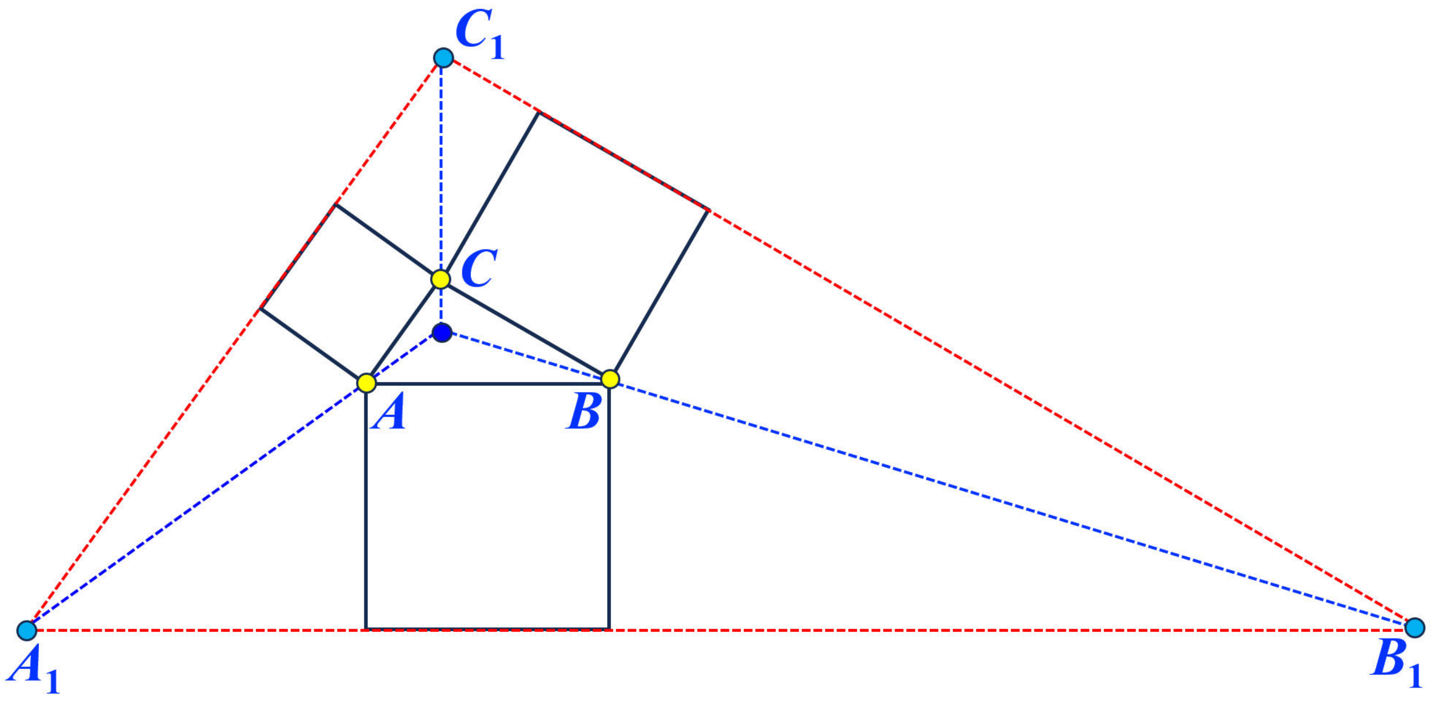
- 對每一個頂點而言，都有一條以分角線為準與中線對稱的線，這一條線叫做和對應中線對稱的類似中線（*symmedian*）。
- 因為對稱關係，類似中線和分角線的夾角與中線和分角線的夾角相同。
- 因為三角型有三個頂點，也就有三條類似中線。

Lemoine/Grebe/Symmedian點: 3/8



- 三條類似中線共點（也就是交於一點）。
- 這個點叫做Lemoine點、Grebe點、或Symmedian點（類似中心）。
- 類似中心在近代三角形幾何學中佔很重要的地位。

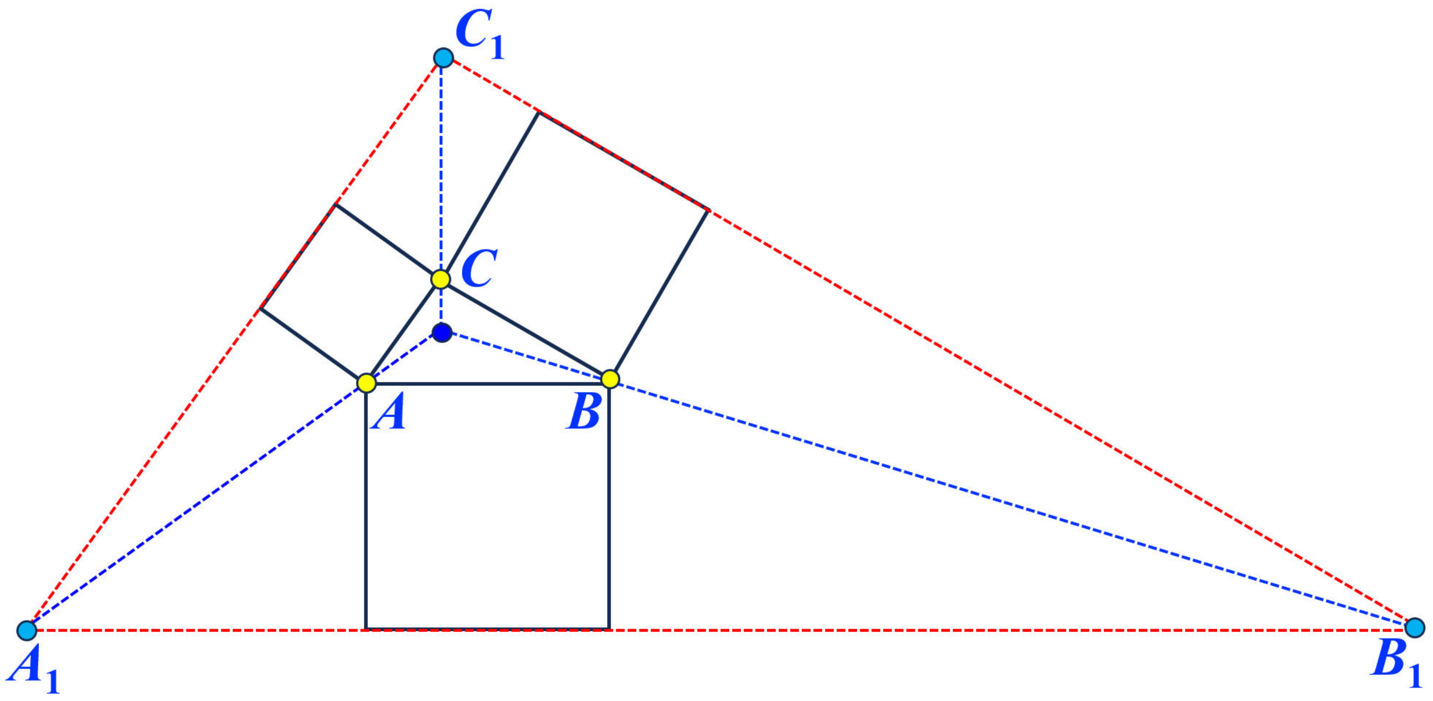
Lemoine/Grebe/Symmedian點: 4/8



- 有很多作**Lemoine**點的方式，但以下這個方法對我們非常有用。
- 已知一個三角形 ΔABC，在各條邊外面作一個該邊長的正方形，延長正方形的最外邊得到一個三角形。
- 這個三角形和原三角形對應頂點之間的連線會交於一點（**為什麼?**）

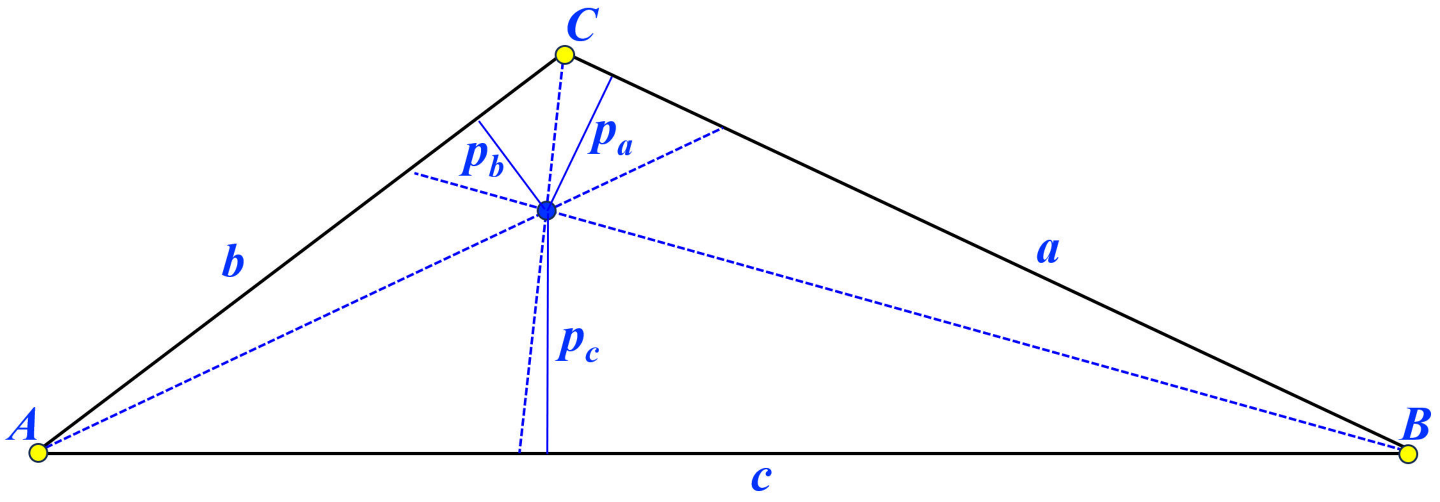
William Gallatly, *The Modern Geometry of the Triangle*, Second edition, Francis Hodgson, London, 1910. [Chapter X, p. 86]

Lemoine/Grebe/Symmedian點: 5/8



- 因為 ΔABC 的邊和對應 $\Delta A_1B_1C_1$ 的邊平行（或說成是在無限遠相交），因此這三個交點共線（都在無限遠直線上）。
- Desargues定理說，在這個條件下，對應頂點的連線共點。
- 這個點就是Lemoine點。

Lemoine/Grebe/Symmedian點: 6/8



- 若從Lemoine點到邊長 a 的距離為 p_a；同樣地，到邊 b 和邊 c 的距離叫做 p_b 和 p_c。
- Lemoine點的一項很重要的特性如下：

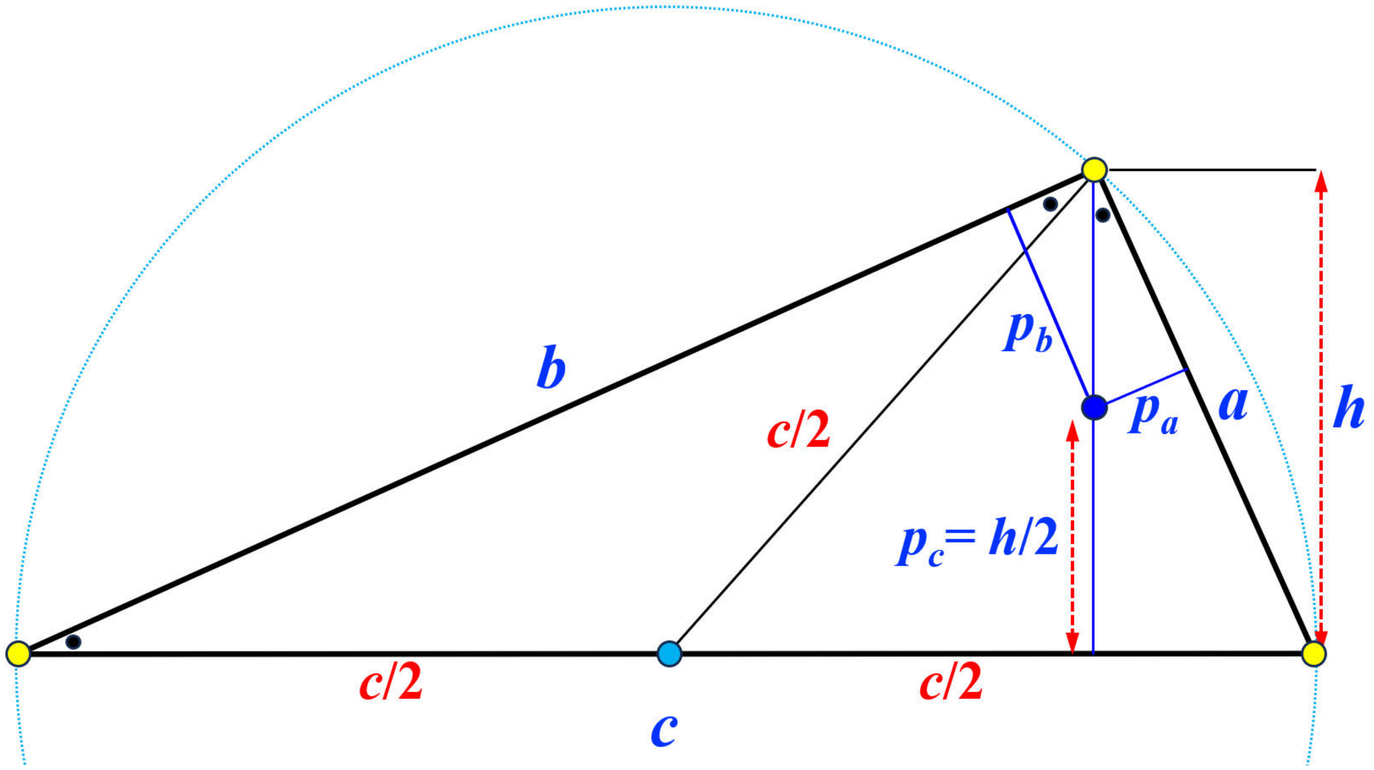
  $a:b:c = p_a : p_b : p_c$ 或

  $$\frac{p_a}{a} = \frac{p_b}{b} = \frac{p_c}{c}$$

- 反之，滿足上述特性的點就是Lemoine點。

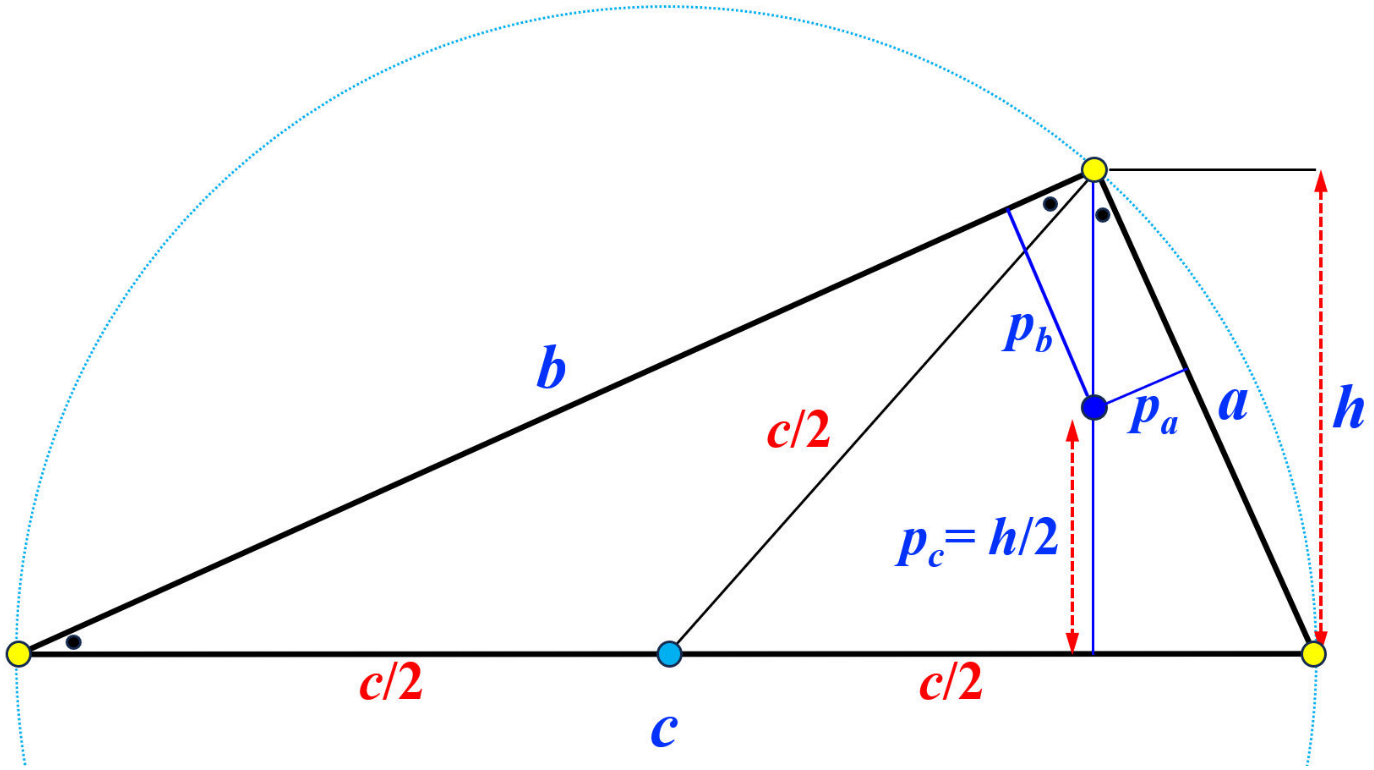
Ross Honsberger, Episodes in Nineteenth and Twentieth *Century Euclidean Geometry*, The Mathematical Association Of America, 1995. [p. 59]

Lemoine/Grebe/Symmedian點: 7/8



- 如果已知三角形是個直角三角形，情況就簡單許多。
- 首先，斜邊上的**類似中線**就是斜邊上的高。
- 從左邊的圖不難證明這一點。
- 另外，高的**中點**就是**Lemoine**點。

Lemoine/Grebe/Symmedian點: 8/8



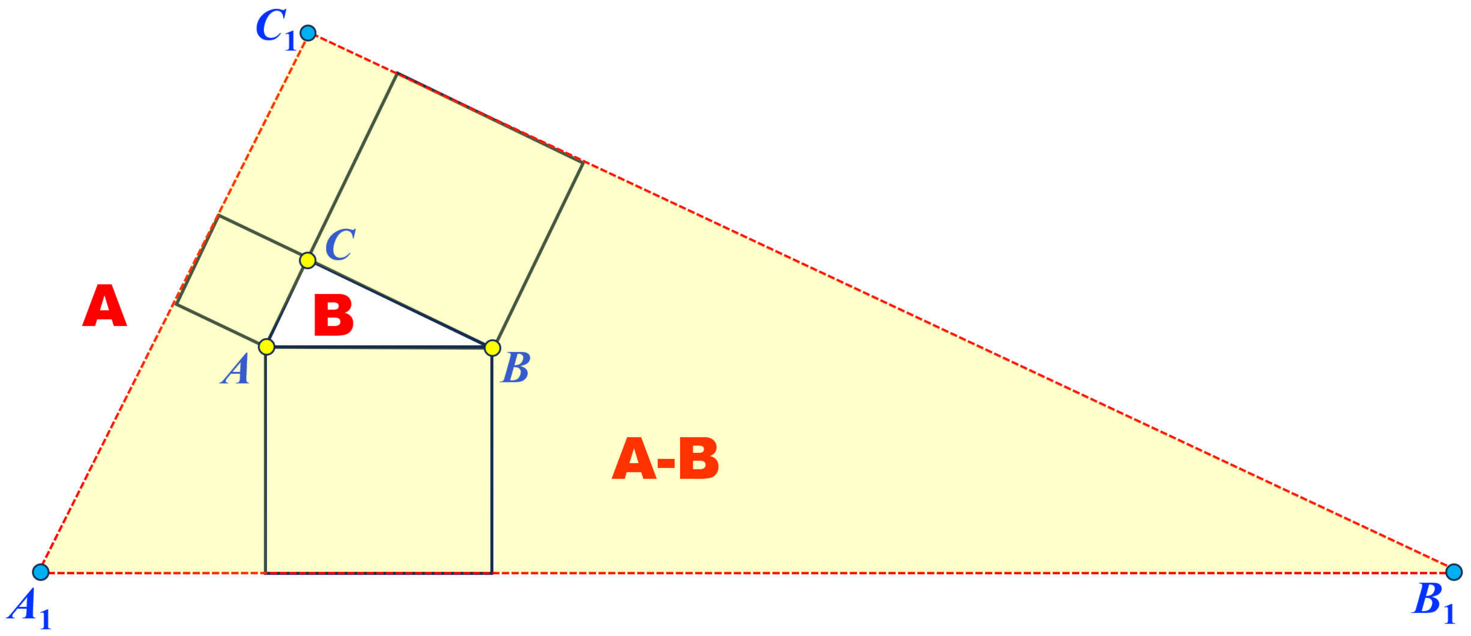
- 令 h 表示斜邊上高的長度。
- 由於直角三角形的面積，我們有這樣的關係 $(a \times b)/2 = (c \times h)/2$ 。
- 於是得到 $h = (a \times b)/c$和

$$p_c = \frac{h}{2} = \frac{a \cdot b}{2c}$$

$$p_b = \frac{b}{c} \cdot p_c = \frac{a \cdot b^2}{2c^2}$$

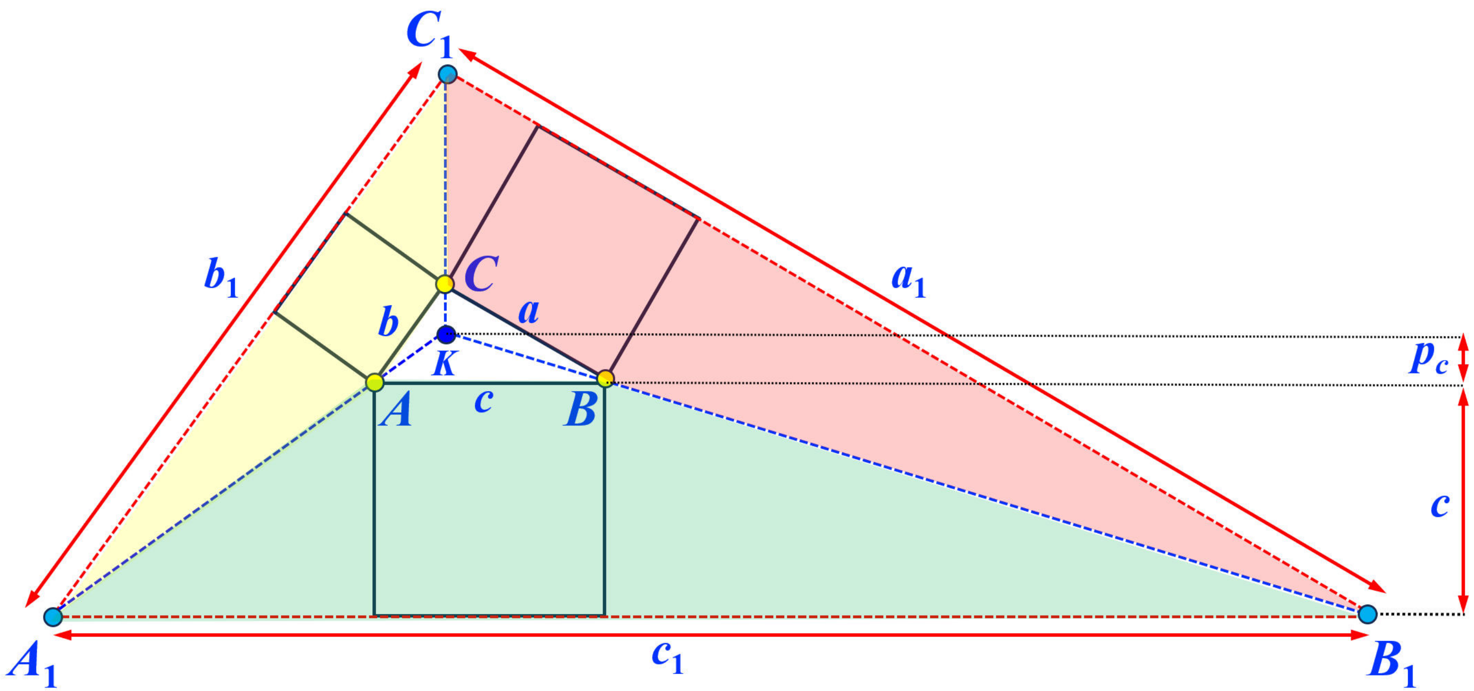
$$p_a = \frac{a}{c} \cdot p_c = \frac{a^2 \cdot b}{2c^2}$$

一個可能是新的證明: 1/8



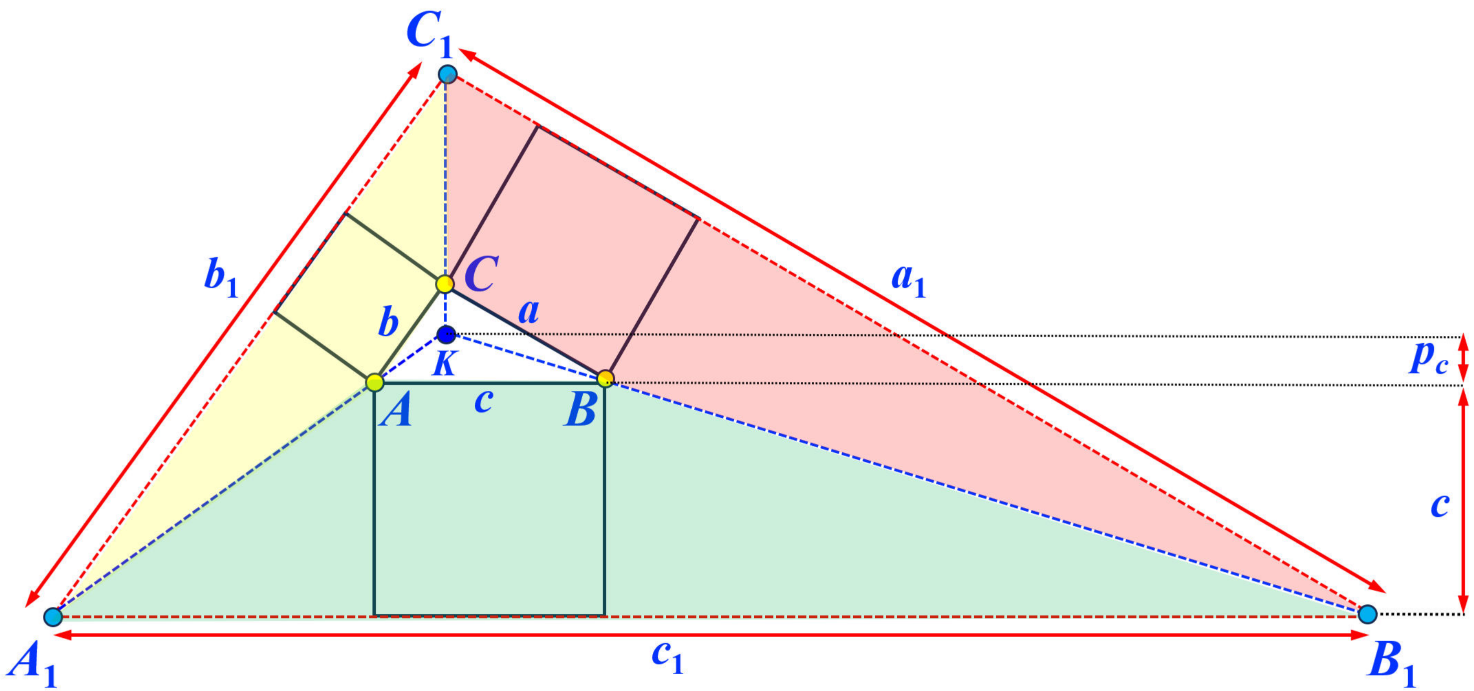
- 已知一個直角三角形 ΔABC 而且 $\angle C = 90°$，在每一邊上以該邊長作一個正方形。
- 然後，延長正方形在外側的邊得到另一個直角三角形 $\Delta A_1B_1C_1$。
- 很明顯地 ΔABC 和 $\Delta A_1B_1C_1$ 相似。
- 於是 **A** 是在外的三角形 $\Delta A_1B_1C_1$、 **B** 是已知三角形 ΔABC、而 **A-B** 則是兩者之間的「三角環形」。

一個可能是新的證明: 2/8



- 兩個三角形 ΔABC 和 $\Delta A_1B_1C_1$ 的對應頂點連線共點、令為 K，這是Lemoine點。
- K 是斜邊上的高的中點。
- 從 K 到斜邊的距離為 $p_c = (ab)/(2c)$。
- 於是 ΔKAB 在AB上的高為 p_c，而 ΔKA_1B_1 在 A_1B_1邊上的高為 $p_c + c$。

一個可能是新的證明: 3/8

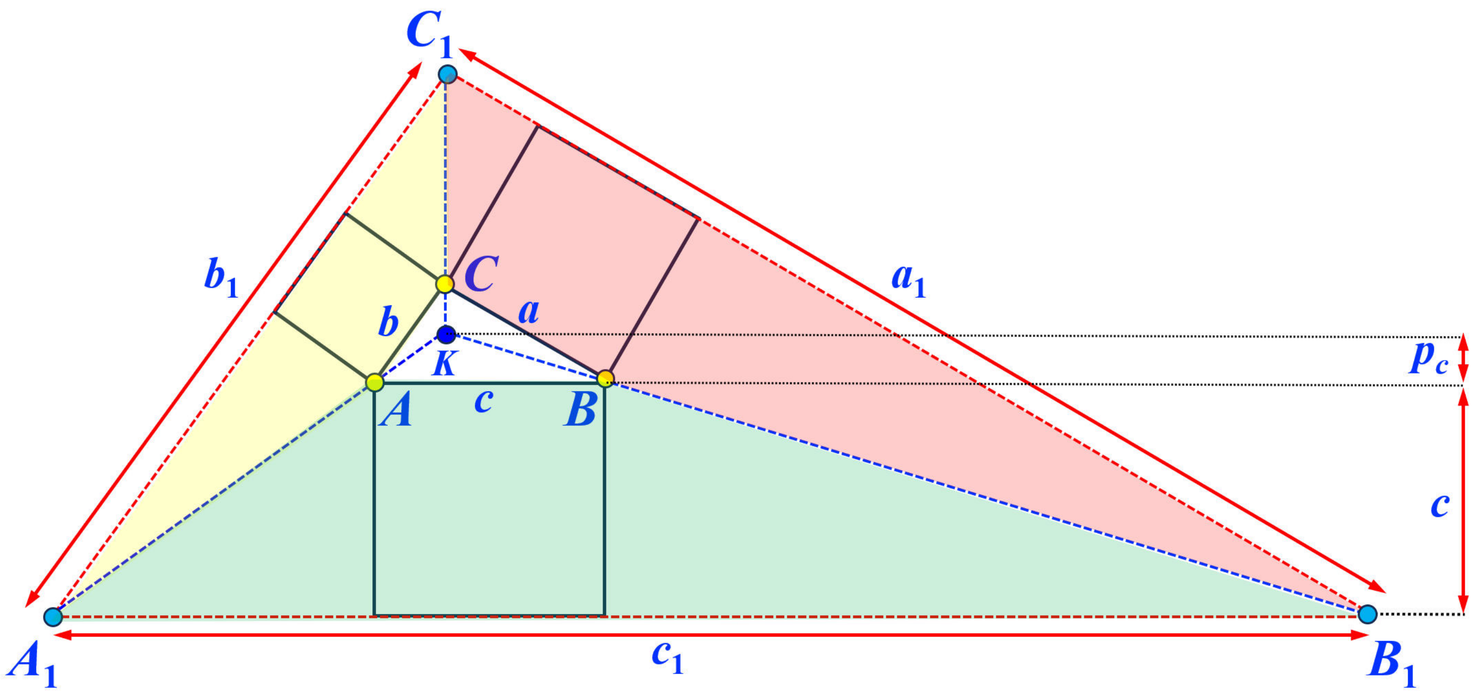


- ΔKAB 和 ΔKA_1B_1相似，從 ΔKA_1B_1 到 ΔKAB 的比例因子 ρ 就是 $\rho = c/c_1 = p_c/(c+p_c)$。
- 這個 ρ 也是從 $\Delta A_1B_1C_1$ 到 ΔABC 的比例因子（也就是 $\rho = a/a_1 = b/b_1 = c/c_1$）。
- 因為 $p_c = (ab)/(2c)$，我們得到：

$$\rho = \frac{c}{c_1} = \frac{\Delta KAB\text{'s altitude}}{\Delta KA_1B_1\text{'s altitude}} = \frac{p_c}{p_c + c} = \frac{\frac{ab}{2c}}{\frac{ab}{2c} + c} = \frac{ab}{2c^2 + ab}$$

一個可能是新的證明: 4/8

- 因為 $\rho= (ab)/(2c^2+ab)$，所以

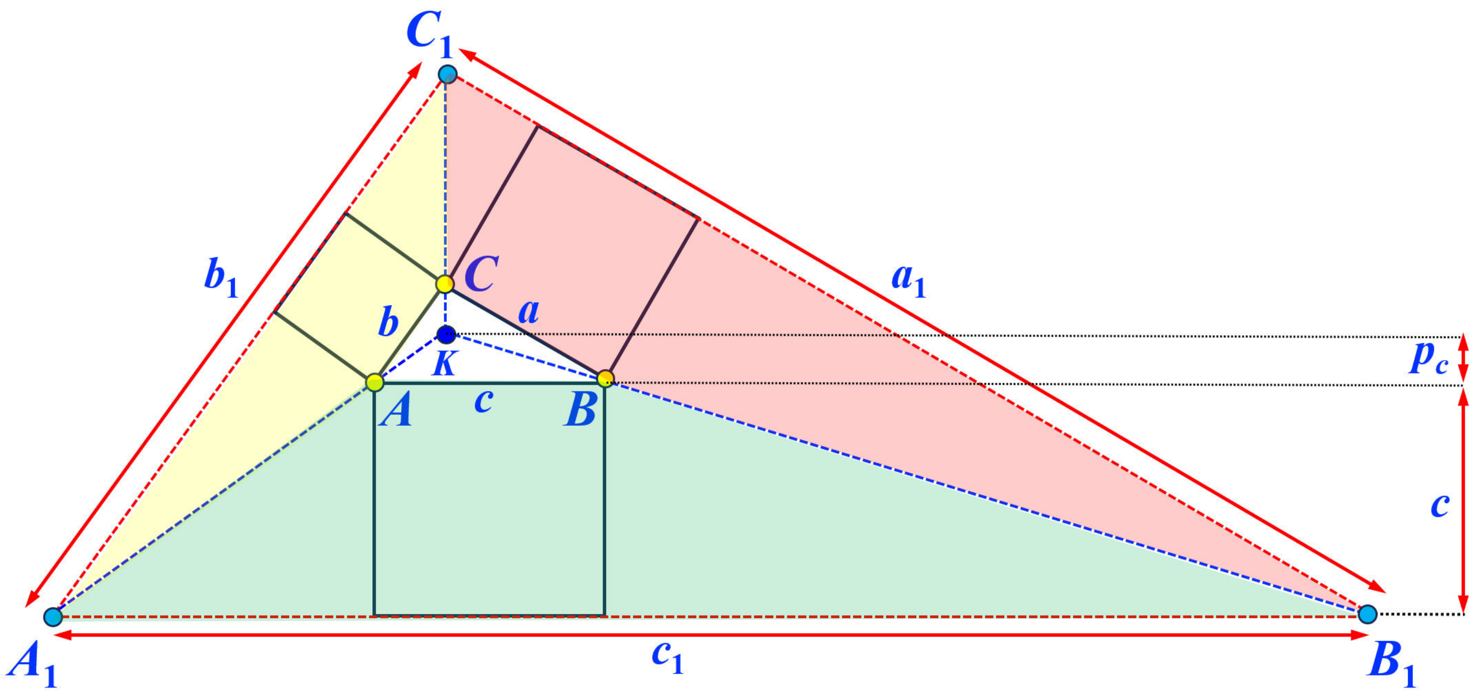


$$\rho = \frac{ab}{2c^2 + bc}$$

$$1-\rho = \frac{2c^2}{2c^2 + bc}$$

$$\frac{1-\rho}{\rho} = \frac{2c^2}{ab}$$

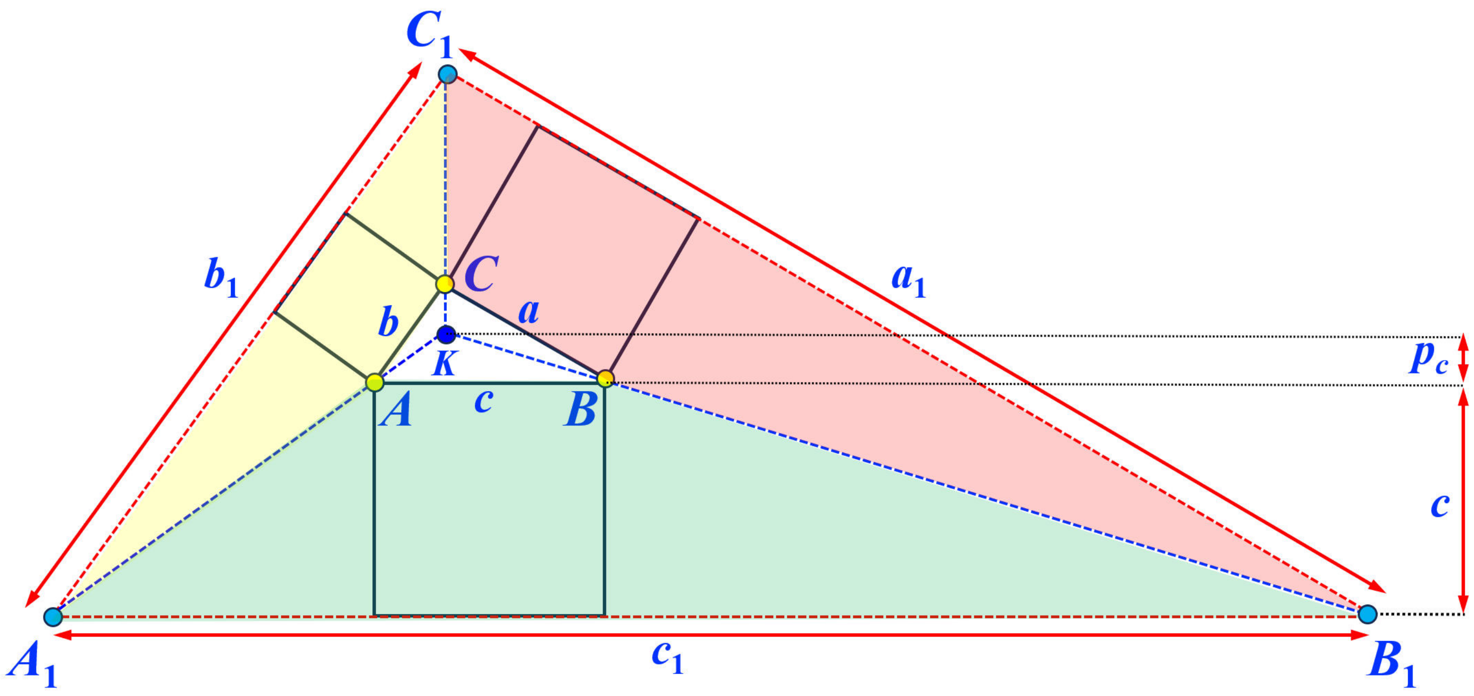
一個可能是新的證明: 5/8



- 因為 $\rho = a/a_1 = b/b_1 = c/c_1$，我們有 $a_1 = a/\rho$、$b_1 = b/\rho$ 和 $c_1 = c/\rho$。
- 然後，我們得計算三個梯形 ABB_1A_1、CAA_1C_1和 BCC_1B_1 的面積

$$\begin{aligned}\text{Area}(ABB_1A_1) &= \frac{1}{2}(c+c_1)\cdot c \\ &= \frac{1}{2}\left(c+\frac{c}{\rho}\right)\cdot c \\ &= \frac{c^2}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right)\end{aligned}$$

一個可能是新的證明: 6/8



- 其它兩者可以用相同方式算出來:

$$\text{Area}(ABB_1A_1) = \frac{c^2}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right)$$

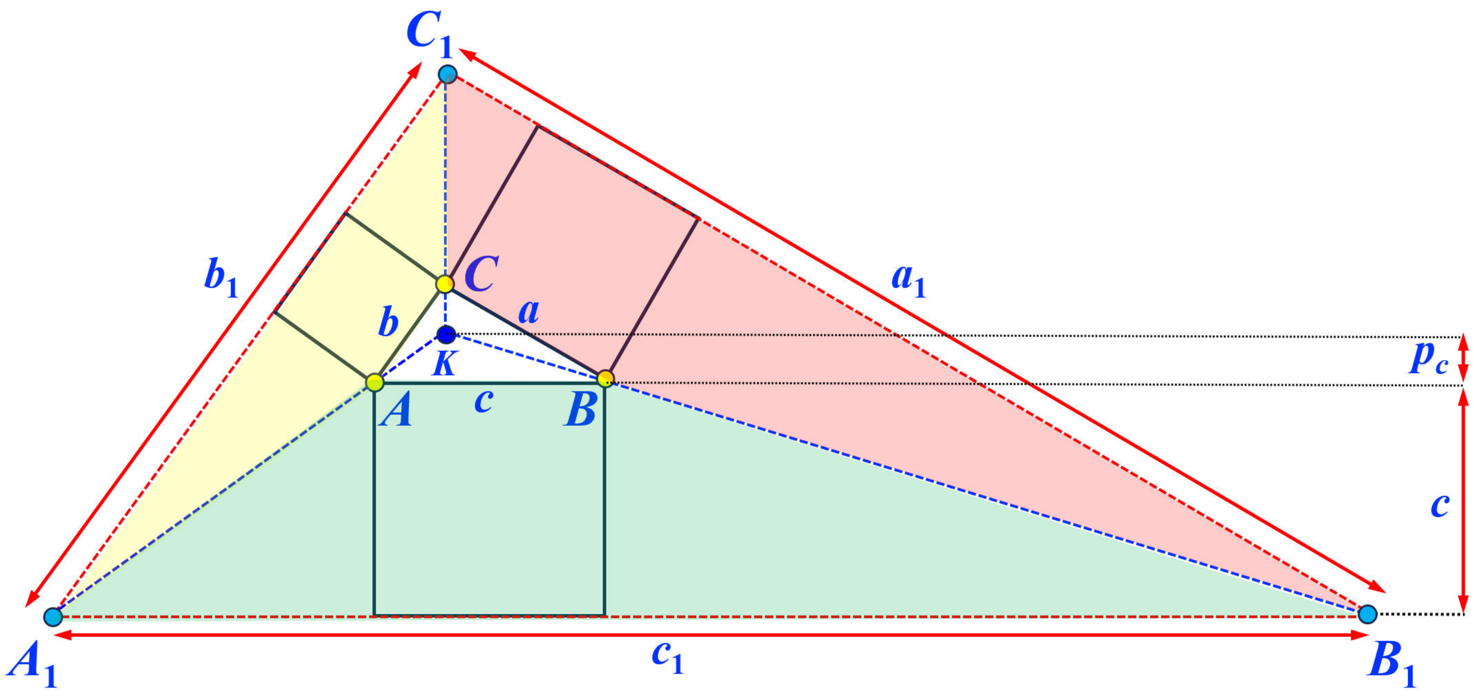
$$\text{Area}(CAA_1C_1) = \frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\text{Area}(BCC_1B_1) = \frac{a^2}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right)$$

- 於是「三角環形」的面積就是:

$$\text{Area(outer triangular ring)} = \text{Area}(ABB_1A_1) + \text{Area}(CAA_1C_1) + \text{Area}(BCC_1B_1) = \frac{(a^2+b^2+c^2)}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right)$$

一個可能是新的證明: 7/8



- 用此地方法計算的 $\Delta A_1B_1C_1$ 面積是：

$$\text{Area}(\Delta A_1B_1C_1) = \frac{1}{1-\rho^2}\,\text{Area(outer triangular ring)}$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(1+\frac{1}{\rho}\right)$$

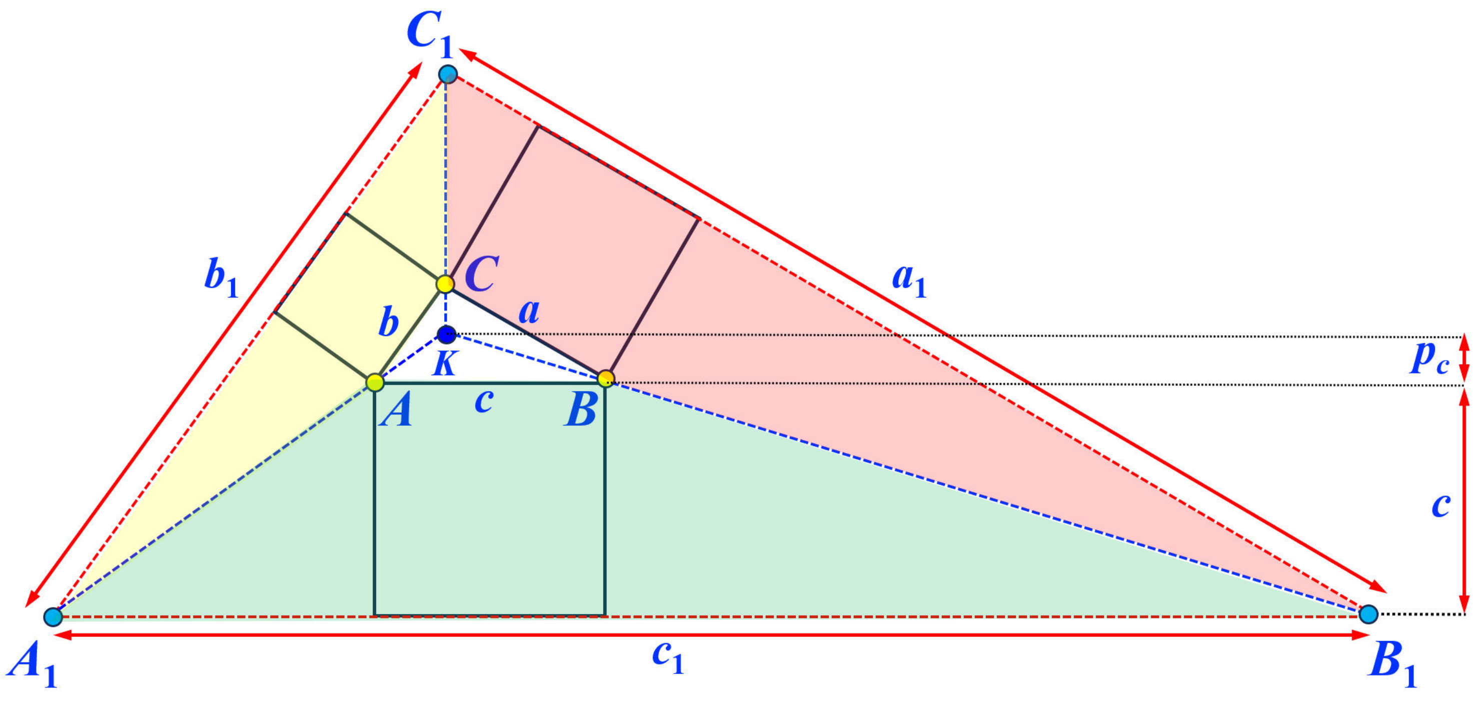
$$= \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\frac{1}{(1-\rho)\boxed{(1+\rho)}}\,\frac{\boxed{1+\rho}}{\rho}$$

$$= \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{\rho(1-\rho)}$$

- 這個面積也可以這樣算：

$$\text{Area}(\Delta A_1B_1C_1) = \frac{1}{2}(a_1\cdot b_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\rho}\cdot\frac{b}{\rho} = \frac{a\cdot b}{2\rho^2}$$

一個可能是新的證明: 8/8



- 這兩者必須相等：

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{\boxed{2}}\cdot\frac{1}{\rho(1-\rho)}=\text{Area}(\Delta A_1B_1C_1)=\frac{a\cdot b}{\boxed{2}\rho^2}$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{1-\rho}=\frac{a\cdot b}{\rho}$$

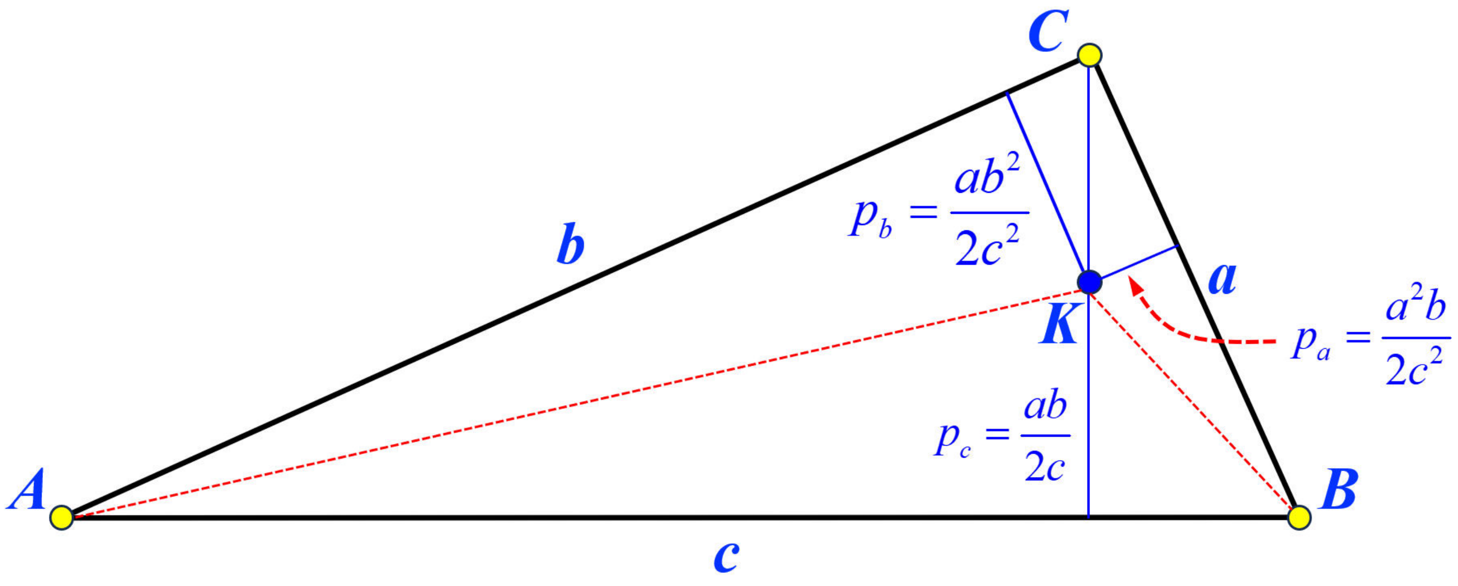
$$a^2+b^2+c^2=(a\cdot b)\boxed{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

$$=(a\cdot b)\boxed{\frac{2c^2}{a\cdot b}}$$

$$=2c^2$$

$$a^2+b^2=c^2$$

另一個簡單的証明: 1/3



- 已知一個直角三角形 ΔABC，它的 $\angle C = 90°$。
- K 是該三角形的Lemoine點。
- 令從 K 到邊 AB、BC 和 CA 的距離分別是 p_a、p_b 和 p_c。
- 前面已經證明了：

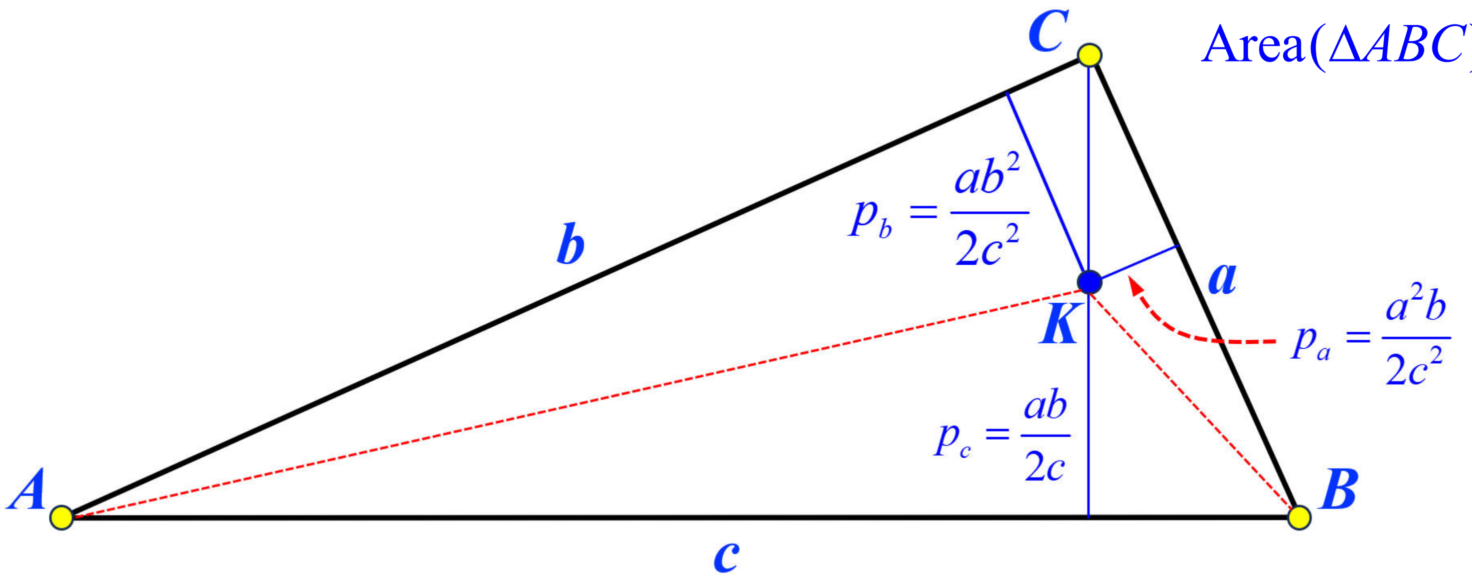
$$p_c = \frac{h}{2} = \frac{a \cdot b}{2c}$$

$$p_b = \frac{b}{c} \cdot p_c = \frac{a \cdot b^2}{2c^2}$$

$$p_a = \frac{a}{c} \cdot p_c = \frac{a^2 \cdot b}{2c^2}$$

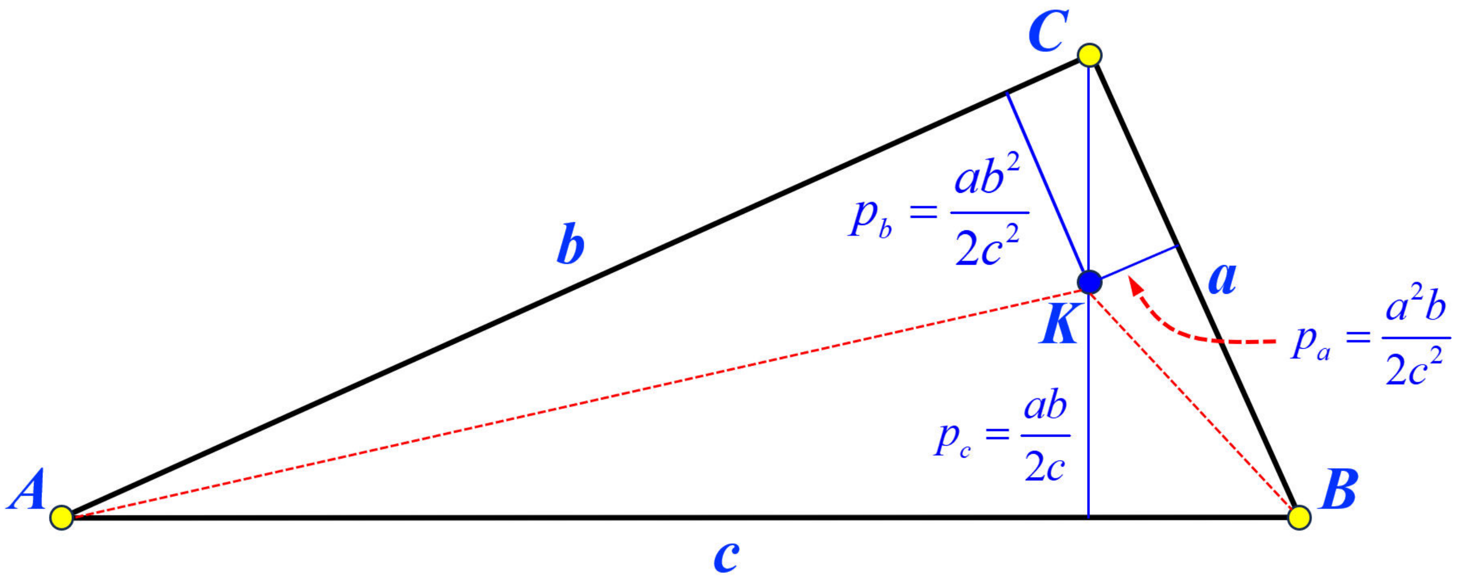
另一個簡單的証明: 2/3

- ΔABC 的面積是三角形 ΔKAB、ΔKBC 和 ΔKCA的和：



$$
\begin{aligned}
\text{Area}(\Delta ABC) &= \text{Area}(\Delta KAB) + \text{Area}(\Delta KBC) + \text{Area}(\Delta KCA) \\
&= \frac{1}{2} c \cdot p_c + \frac{1}{2} a \cdot p_a + \frac{1}{2} b \cdot p_b \\
&= \frac{1}{2} c \left(\frac{ab}{2c} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{a^2 b}{2c^2} \right) + \frac{1}{2} b \left(\frac{ab^2}{2c^2} \right) \\
&= \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{2c^2} + \frac{b^2}{2c^2} \right) \\
&= \frac{ab}{2} \cdot \frac{c^2 + a^2 + b^2}{2c^2}
\end{aligned}
$$

另一個簡單的証明: 3/3



- 三角形 ΔABC 的面積也是 $(a\times b)/2$，它得和前面算出的相等：

$$\boxed{\frac{ab}{2}}\cdot\frac{c^2+a^2+b^2}{2c^2}=\mathrm{Area}(\Delta ABC)=\boxed{\frac{ab}{2}}$$

$$\frac{c^2+a^2+b^2}{2c^2}=1$$

$$c^2+a^2+b^2=2c^2$$

$$a^2+b^2=c^2$$

我們學到了什麼?

- ❑ 相似和隨之而來的比例因子提供了一個有趣的計算線段長度和面積的方式。
- ❑ 這個技巧也提供了證明畢氏定理的新方法。
- ❑ 透過 **Lemoine/Grebe/Symmedian** 點的幫助,我們還做出了新的、而且簡短的畢氏定理證明。

參考文獻

1. Alexander Bogomolny, *Cut the Knot*, http://www.cut-the-knot.org/Pythagoras/Proof100.shtml (retrieved August 10, 2023).
2. William Gallatly, *The Modern Geometry of the Triangle*, 2nd edition, Francis Hodgson, London, 1910.
3. Ross Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, The Mathematical Association of America, 1995.
4. Elisha Scott Loomis, *The Pythagorean Proposition*, 2nd edition, The National Council of Teachers of Mathematics, 1940. A scanned PDF file can be found at https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED037335.pdf.
5. 這個網頁可以下載本投影片：https://pages.mtu.edu/~shene/VIDEOS/GEOMETRY/index-TW.html；這個網頁是英文版：https://pages.mtu.edu/~shene/VIDEOS/GEOMETRY/index-EN.html，其中還有一篇有關本影片內容的長文

結束， 謝謝觀看