# 畢氏定理：III

## 兩位美國高中生的“不可能”證明

天將降大任于是人也，必先苦其心志，勞其筋骨，
餓其體膚，空乏其身，行拂亂其所為，所以動心忍性，
增益其所不能。

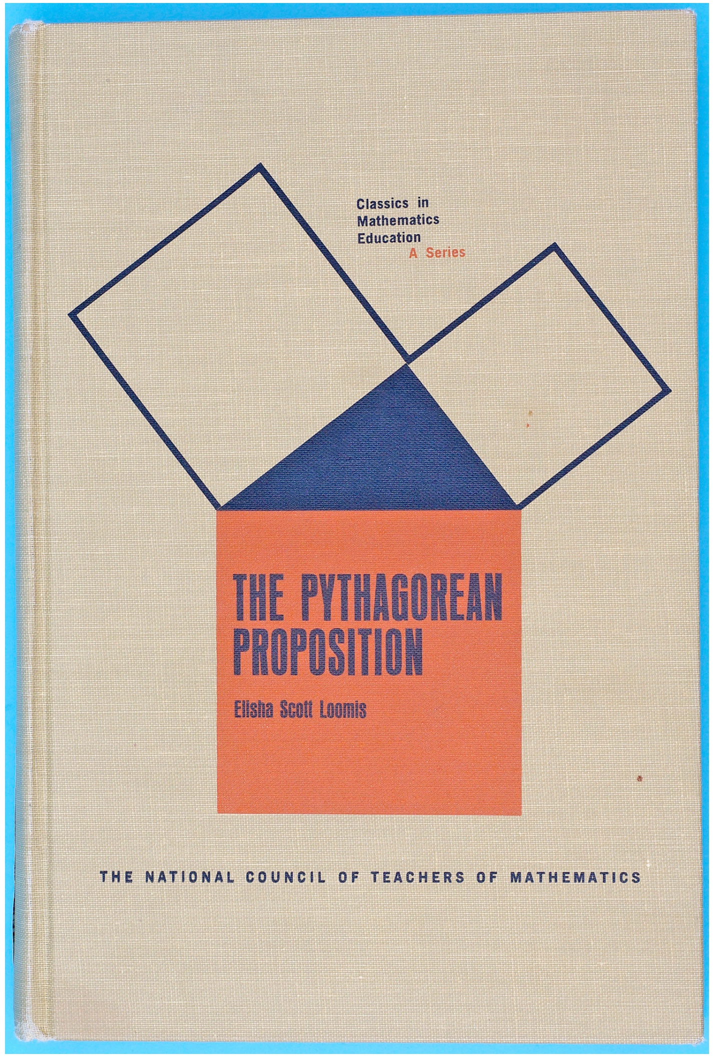
孟子

# 會說些什麼?

1. 回顧Loomis在1907年書中的錯誤說法。
2. 回顧本系列第二講中討論的觀念。
3. 兩位美國高中生（Jackson和Johnson）的純幾何證明。
4. 原本的三角學上的證明。

# Loomis的錯誤說法

# Loomis 1907出版的書: 1/3




1. *Elisha Scott Loomis*（1852–1940）出版了*The Pythagorean Proposition* 這本書，書中收錄了256個證明。
2. 書中說不可能用三角學證明畢氏定理，因為三角學中的基本等式都依賴畢氏定理。
3. 但是，本系列的第一講中我們就證明了這是個錯誤的說法。

# 100+ Years Ago: 2/3

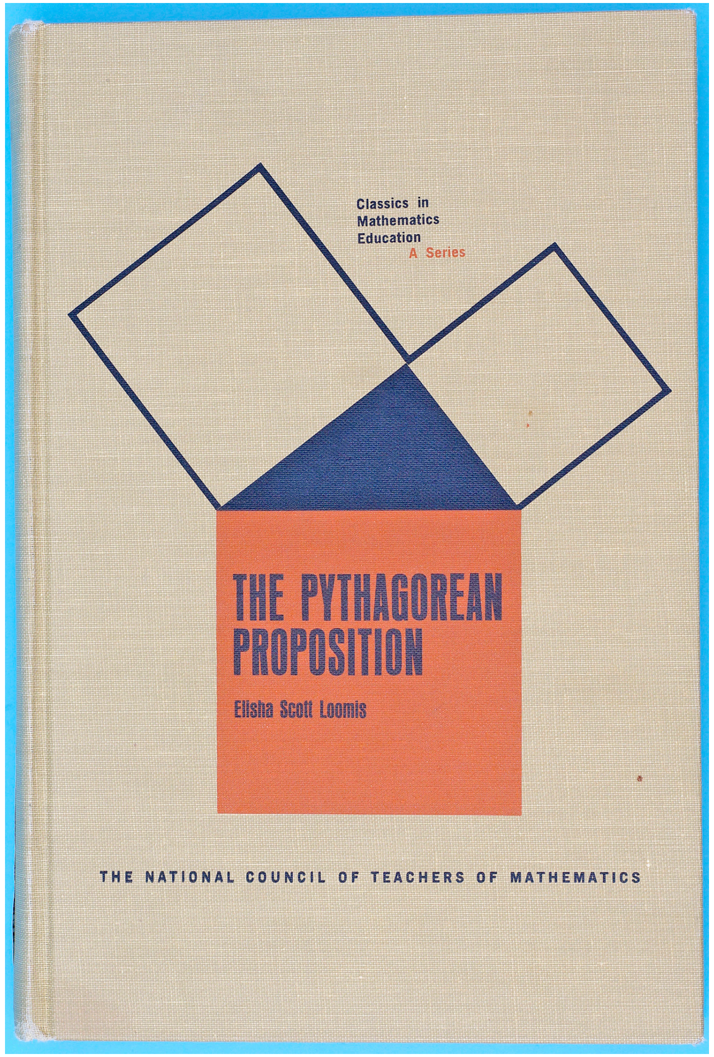
**This is what Loomis said in his 1907 book**

NO TRIGONOMETRIC PROOFS

Facing forward the thoughtful reader may raise the question: Are there any proofs based upon the science of trigonometry or analytical geometry?

There are no trigonometric proofs, because all the fundamental formulae of trigonometry are themselves based upon the truth of the Pythagorean Theorem; because of this theorem we say $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, etc. Triginometry *is* because the Pythagorean Theorem *is*.

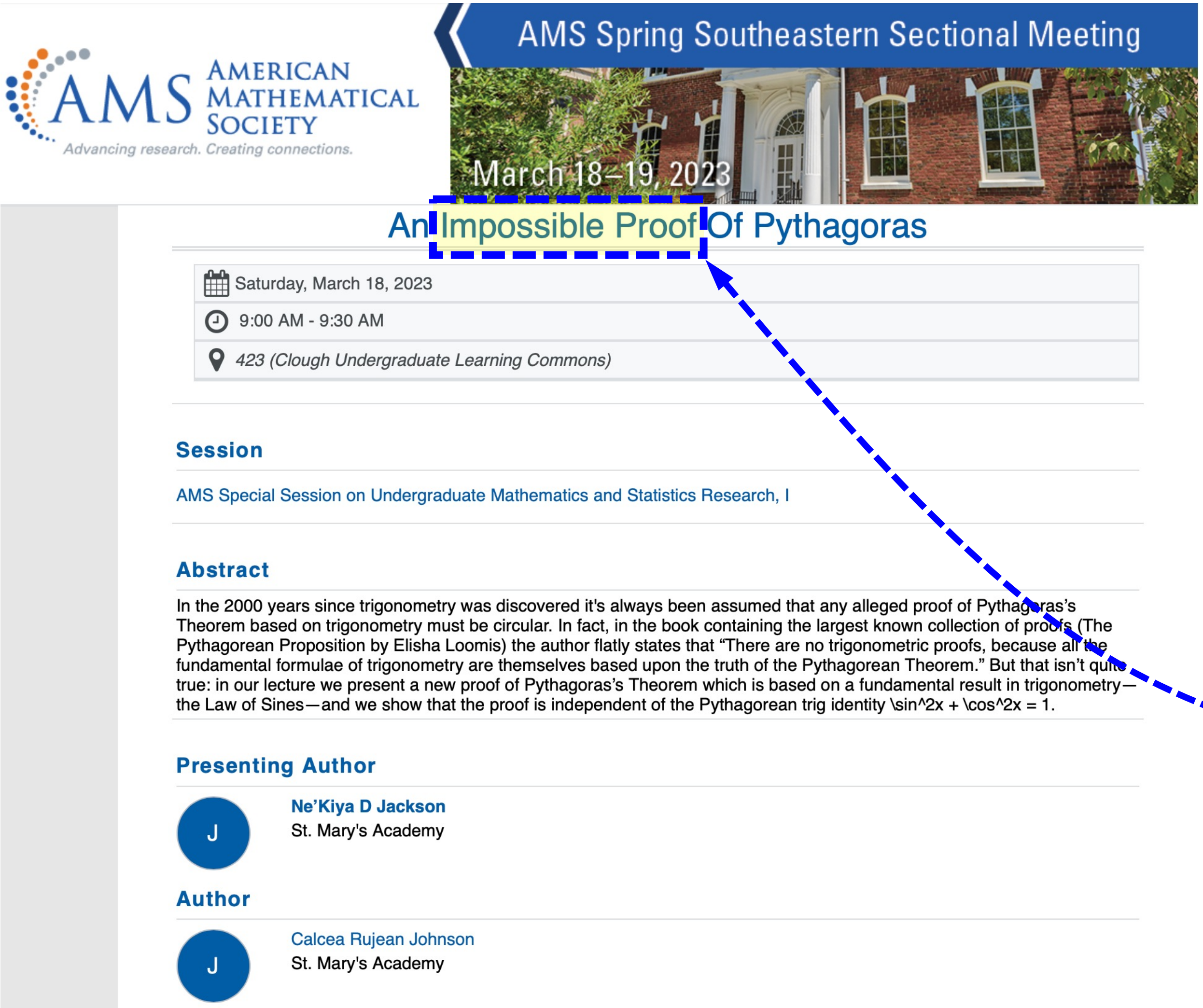
# 100+ Years Ago: 3/3




1. 不少人似乎相信Loomis的說法。
2. 第一講證明了Loomis的說法是錯的，不用畢氏定理就可以證明一些十分有用的基礎等式（譬如角和以及角差等式）。
3. 我們甚至可以不用畢氏定理就可以証明畢氏等式。

在AMS (American Mathematical Society) 區域會議的Jackson和Johnson

# Jackson and Johnson: 1/3


AMS American Mathematical Society
Advancing research. Creating connections.

AMS Spring Southeastern Sectional Meeting

March 18–19, 2023

An Impossible Proof Of Pythagoras

Saturday, March 18, 2023

9:00 AM - 9:30 AM

423 (Clough Undergraduate Learning Commons)

**Session**

AMS Special Session on Undergraduate Mathematics and Statistics Research, I

**Abstract**

In the 2000 years since trigonometry was discovered it's always been assumed that any alleged proof of Pythagoras's Theorem based on trigonometry must be circular. In fact, in the book containing the largest known collection of proofs (The Pythagorean Proposition by Elisha Loomis) the author flatly states that “There are no trigonometric proofs, because all the fundamental formulae of trigonometry are themselves based upon the truth of the Pythagorean Theorem.” But that isn't quite true: in our lecture we present a new proof of Pythagoras's Theorem which is based on a fundamental result in trigonometry—the Law of Sines—and we show that the proof is independent of the Pythagorean trig identity \sin^2x + \cos^2x = 1.

**Presenting Author**

J Ne'Kiya D Jackson
St. Mary's Academy

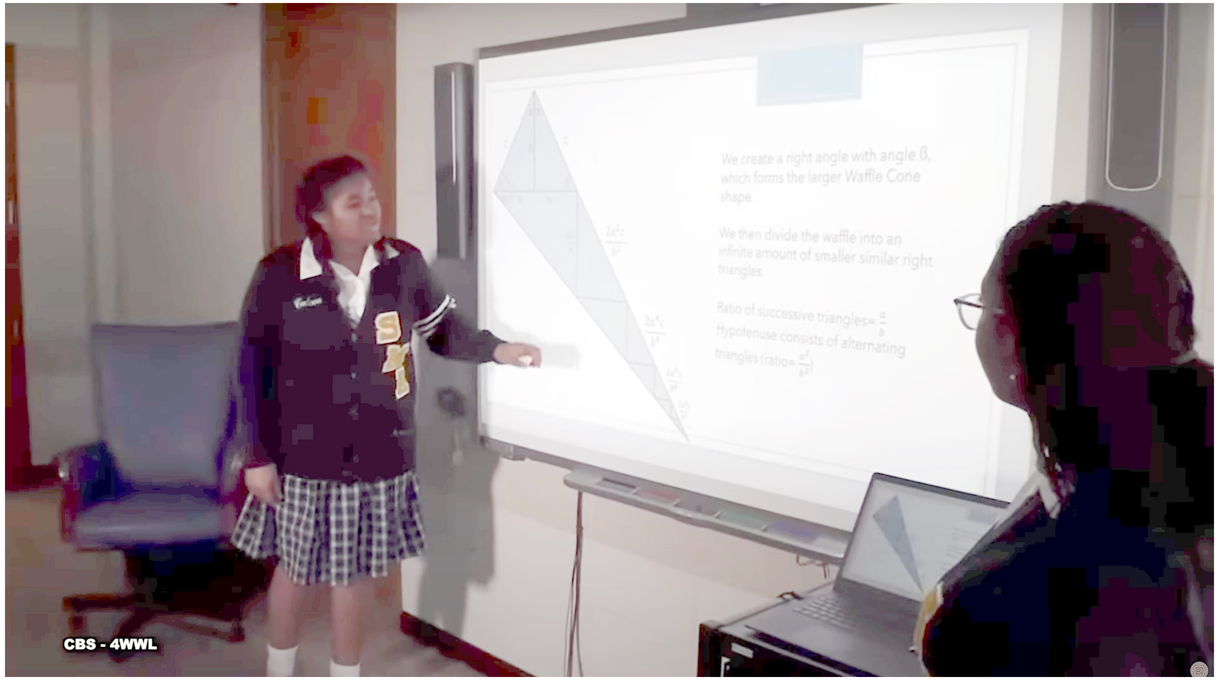
**Author**

J Calcea Rujean Johnson
St. Mary's Academy

1. Ne’Kiya D. Jackson 和 Calcea Rujean Johnson 在 *American Mathematical Society* Spring Southeastern Sectional Meeting (March 18, 2023) 發表了她們的証明。
2. 她們的証明用到了三角學。
3. Jackson 和 Johnson引用Loomis的說法，因此這是個「不可能」的証明。

# Jackson and Johnson: 2/3

Jackson和Johnson在會議中發表她們的成果。

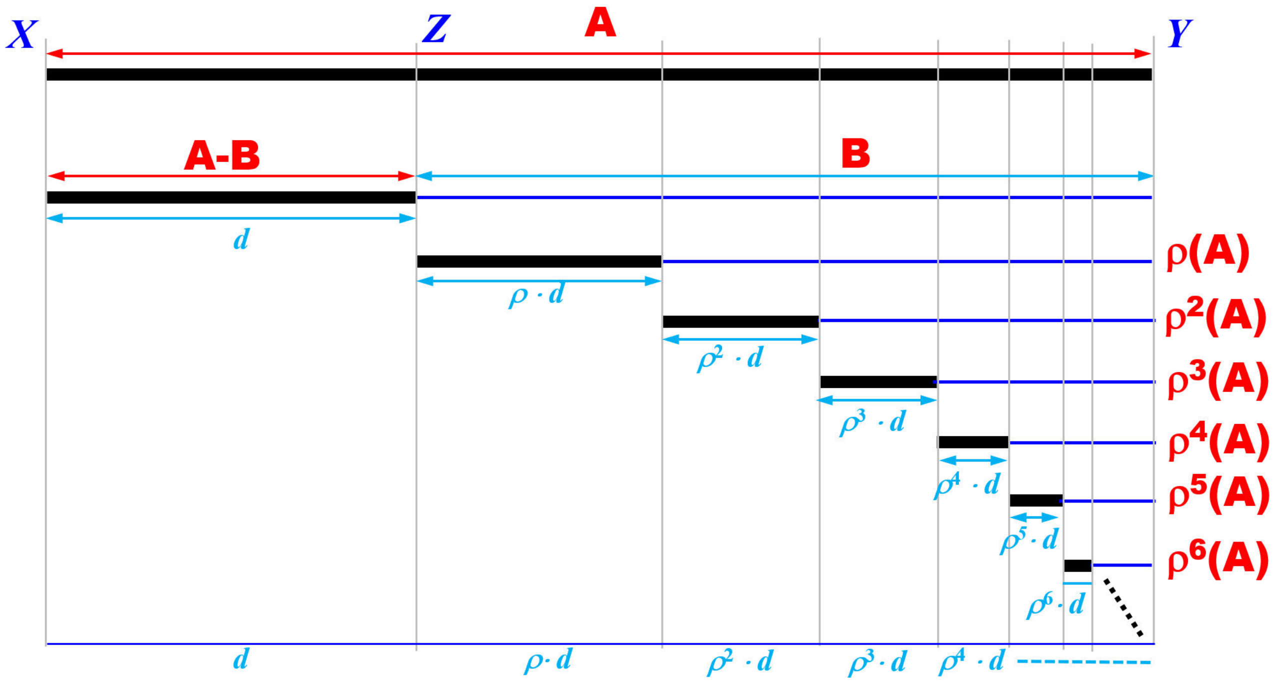

Ne’Kiya Jackson (Left) and Calcea Rujean Johnson

# Jackson and Johnson: 3/3


Ne'Kiya Jackson (right) and Calcea Rujean Johnson being interviewed by ABC News

# 回顧第二講中的想法

# 新主意（線段）：1/3



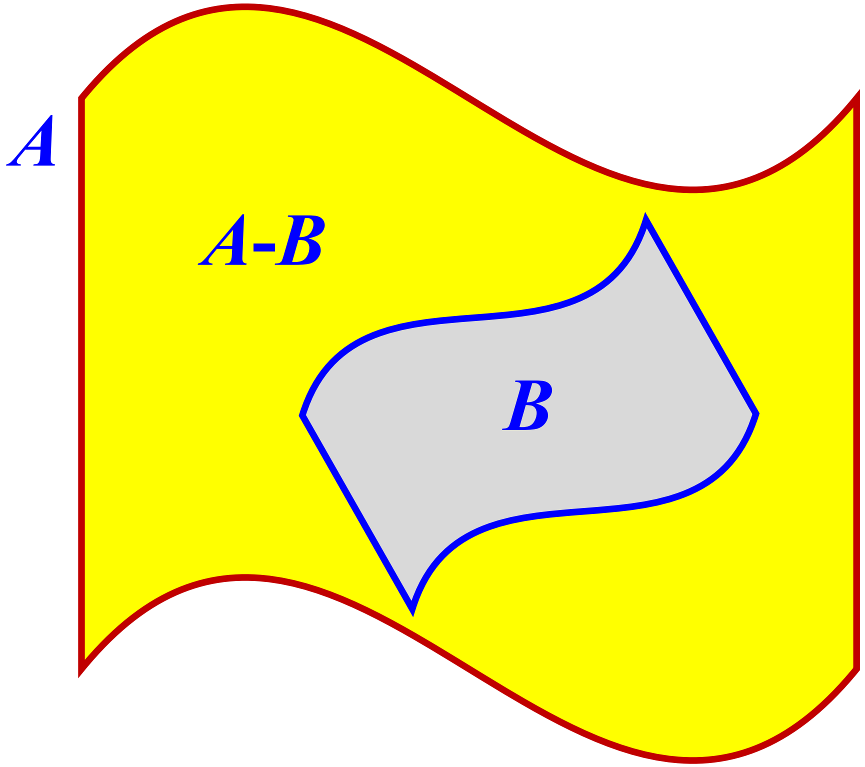

$$d\left(1+\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4+\cdots\right)=\frac{d}{1-\rho}$$

1. 已知線段 $XY$ 和在其中的一點 $Z$，如何計算線段 $XY$ 的長度?
2. 令線段 $XY$ 是 **A**（未知）、$ZY$ 是 **B**（未知）和 $XZ$ 是**A-B**（已知）。
3. 若從 $XY$ 縮小到 $XZ$ 的比例因子是 ρ，我們會得到：

$$\overline{XY}=\frac{1}{1-\rho}\cdot\overrightarrow{XZ}$$

4. 比例因子通常來自相似的圖形。

# 新主意（面積）：2/3

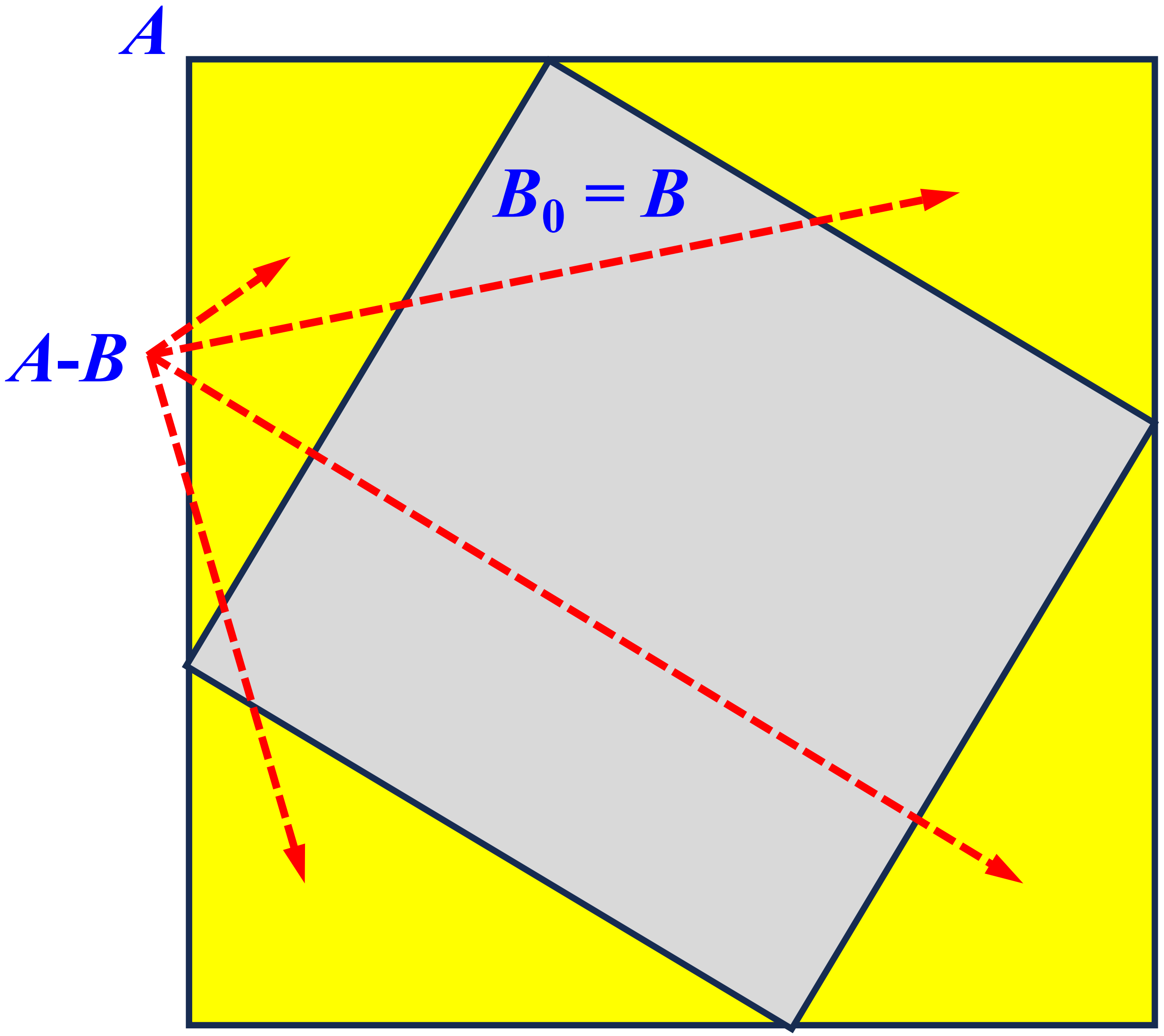



1. 若 $A$ 是一個（多邊形）圖形、而且 $B$ 是在 $A$ 內、和 $A$ 相似的圖形，這表示 $A$ 中的任一條邊 $e$ 和它在 $B$ 中對應的邊 $f$ 滿足 $f = \rho \times e$ ($\rho < 1$)，此地 $\rho$ 是從 $A$ 縮到 $B$ 的比例因子，於是 $A$ 的面積就是：

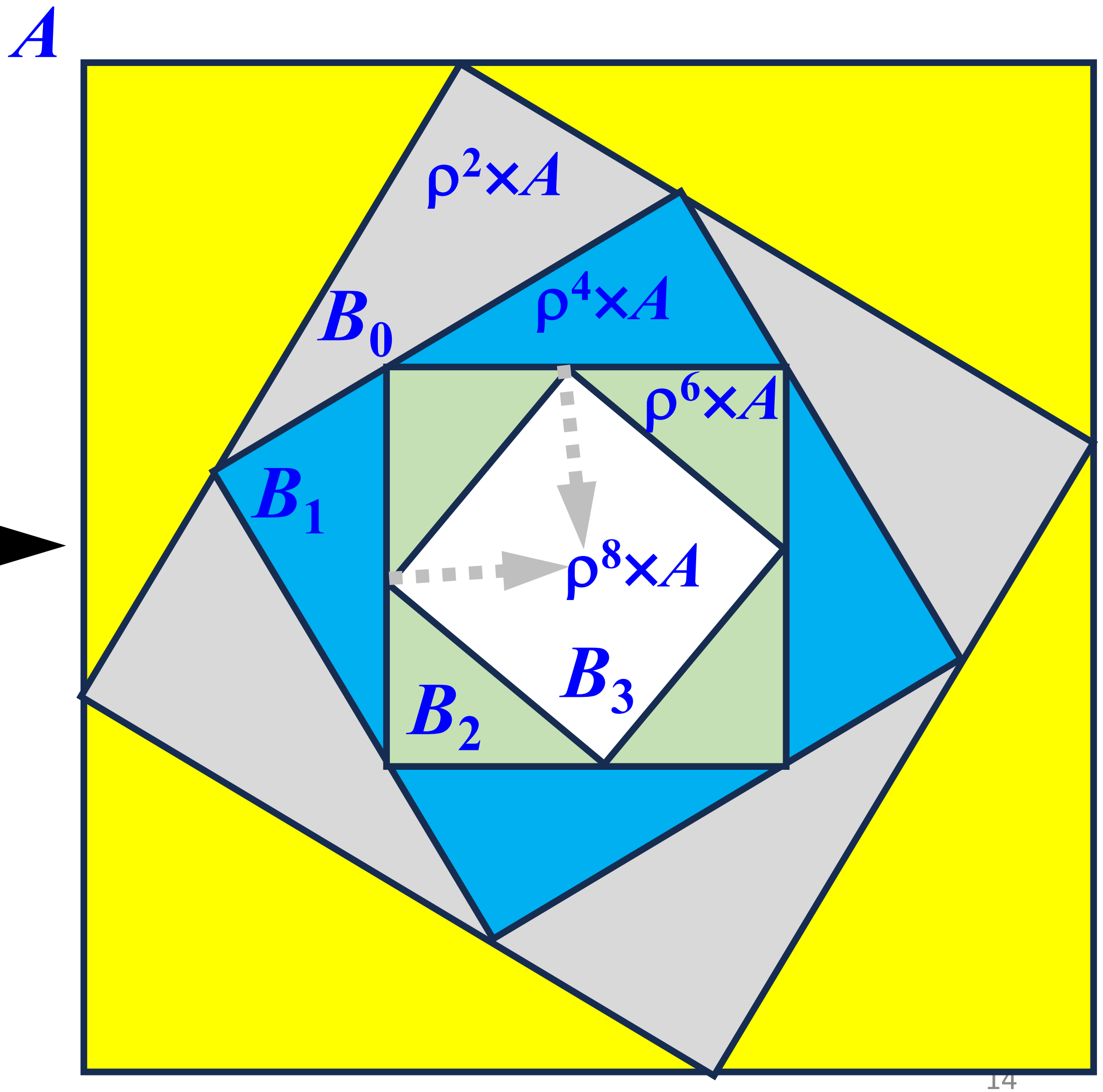
$$\text{Area}(A) = \frac{1}{1-\rho^2}\boxed{\text{Area}(A-B)}$$

已知

# 新主意（面積）：3/3



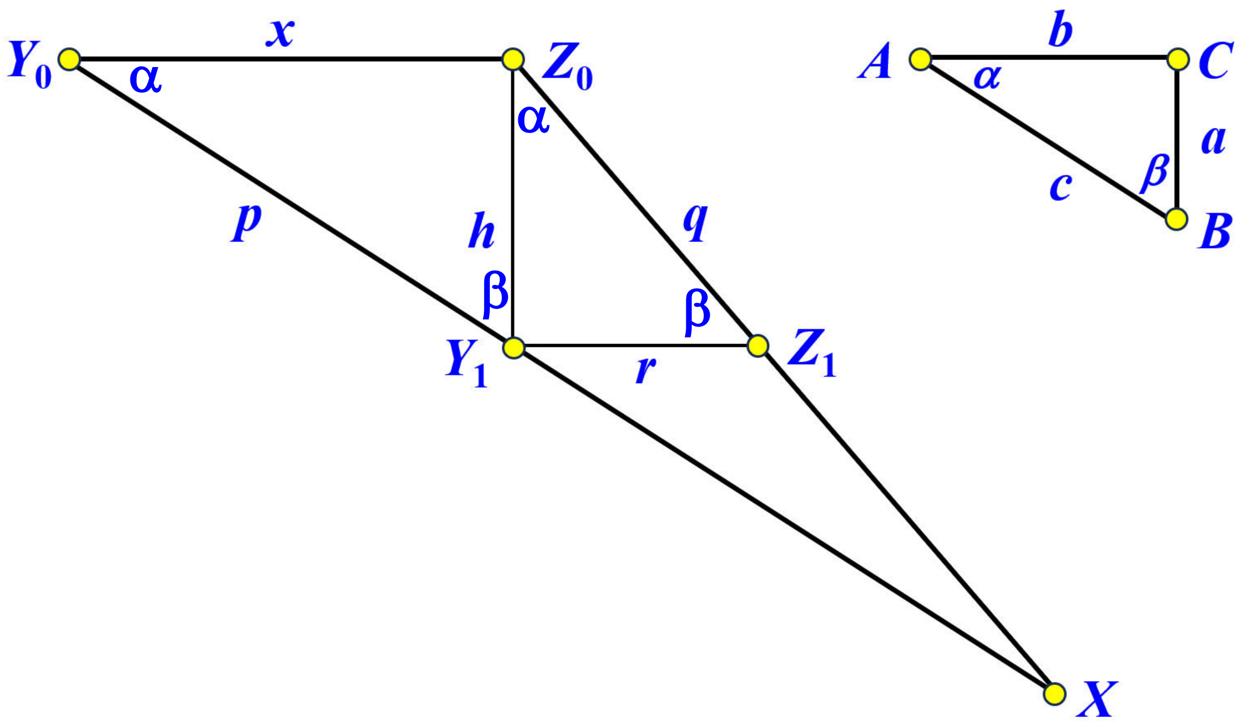
A
$B_0 = B$
A-B

A
$\rho^2 \times A$
$B_0$
$\rho^4 \times A$
$\rho^6 \times A$
$B_1$
$\rho^8 \times A$
$B_3$
$B_2$

# 一個純幾何的証明

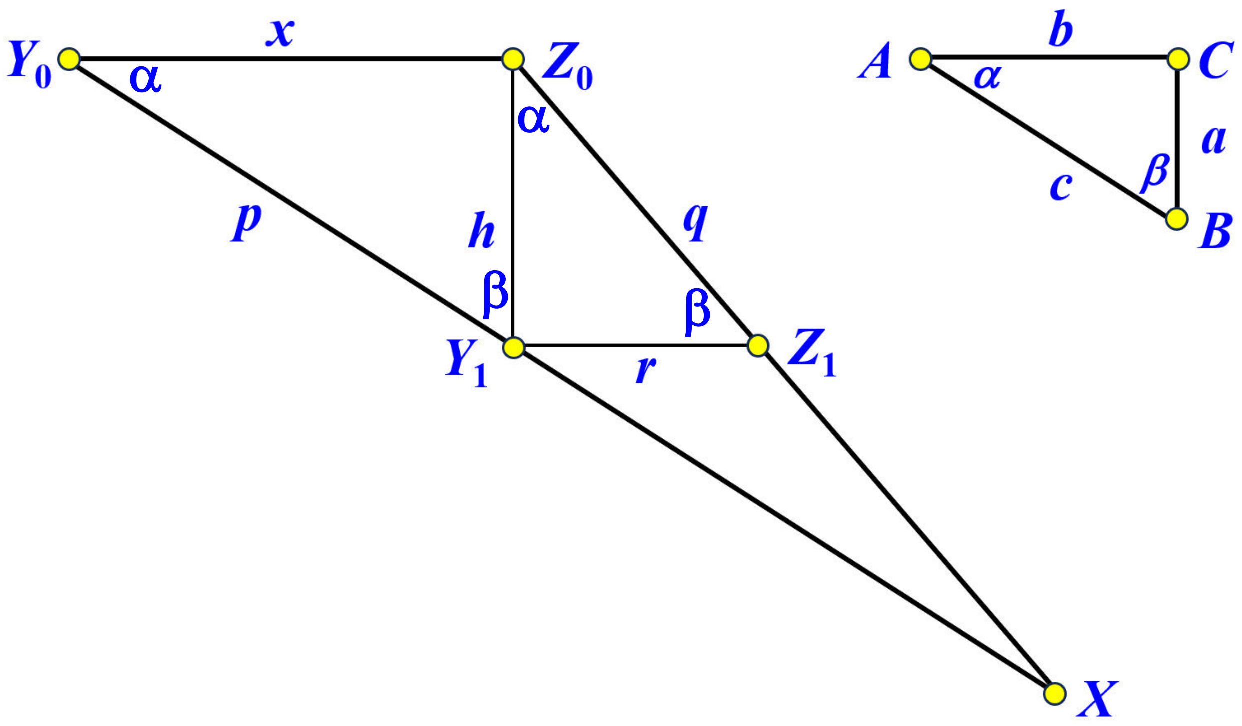
# 一個純幾何證明：1/13




1. 已知一個直角三角形的邊長 $a < b < c$ 和角 $\alpha < \beta < 90°$。$\alpha = \beta$ 的情況會另外處理。
2. 若 $Y_0Z_0$ 是長為 $x$ 的線段，我們作一個三角形 $\Delta XY_0Z_0$ 如下：
   a) $\angle Y_0 = \alpha$
   b) $\angle Z_0 = \alpha + 90°$

   我們希望算出 $\Delta XY_0Z_0$ 的面積。

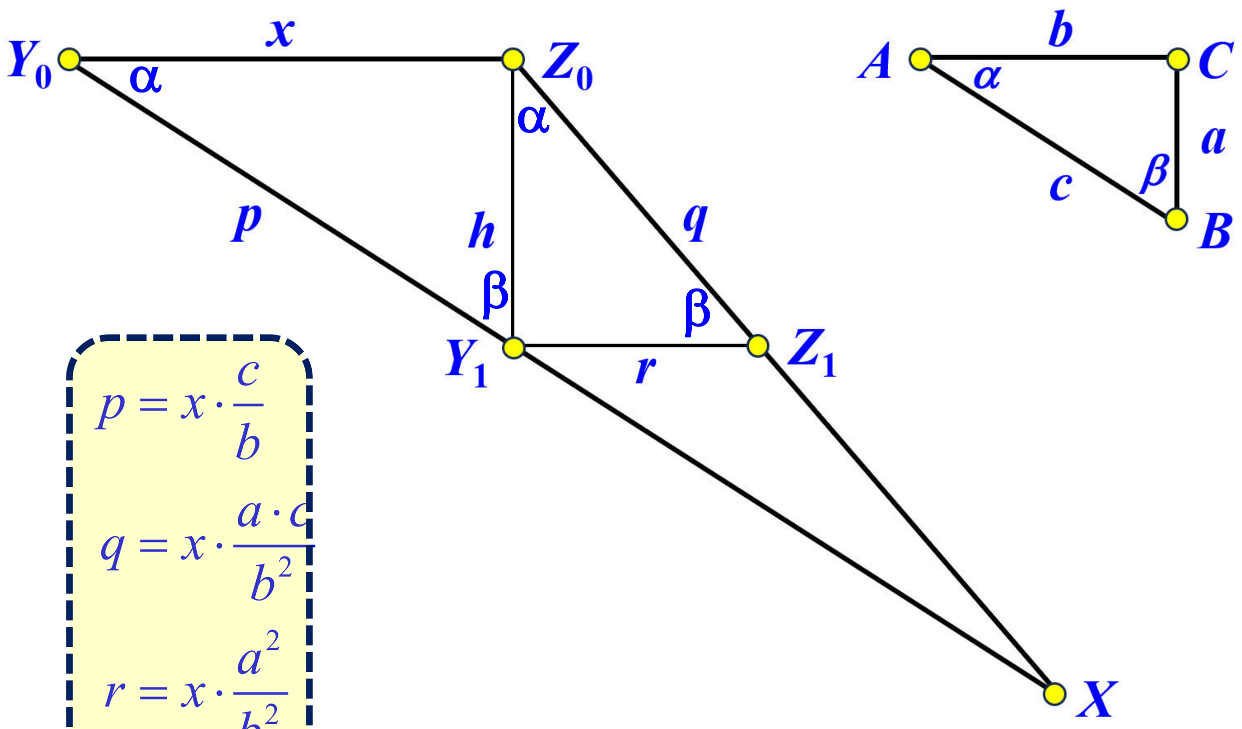
# 一個純幾何證明：2/13




1. 從 $Z_0$ 作和 $Y_0Z_0$ 垂直的線，令它和的 $XY_0$ 交點為 $Y_1$。
2. 從 $Y_1$ 作和 $Y_1Z_0$ 垂直的線，令它和 $XZ_0$ 的交點為 $Z_1$。
3. 用 $p$、$q$、$r$ 和 $h$ 分別表示 $Y_0Y_1$、$Z_0Z_1$、$Y_1Z_1$ 和 $Z_0Y_1$ 的長。
4. 我們得計算梯形 $Y_0Z_0Z_1Y_1$ 的面積。
5. 很明顯地，它的面積是：

$$\mathrm{Area}(Y_0Z_0Z_1Y_1) = \frac{1}{2}(x+r)\times h$$

# 一個純幾何證明：3/13




$$p = x \cdot \frac{c}{b}$$

$$q = x \cdot \frac{a \cdot c}{b^2}$$

$$r = x \cdot \frac{a^2}{b^2}$$

$$h = x \cdot \frac{a}{b}$$

1. 因為梯形 $Y_0Z_0Z_1Y_1$ 的面積是：

$$\text{Area}(Y_0Z_0Z_1Y_1) = \frac{1}{2}(x+r)\times h$$

我們得先算出 $h$ 和 $r$（$x$ 為已知）。

2. 因為 $\Delta Y_0Y_1Z_0$ 和 $\Delta ABC$ 相似，我們有 $h/x = a/b$ 和 $p/x = c/b$，當然

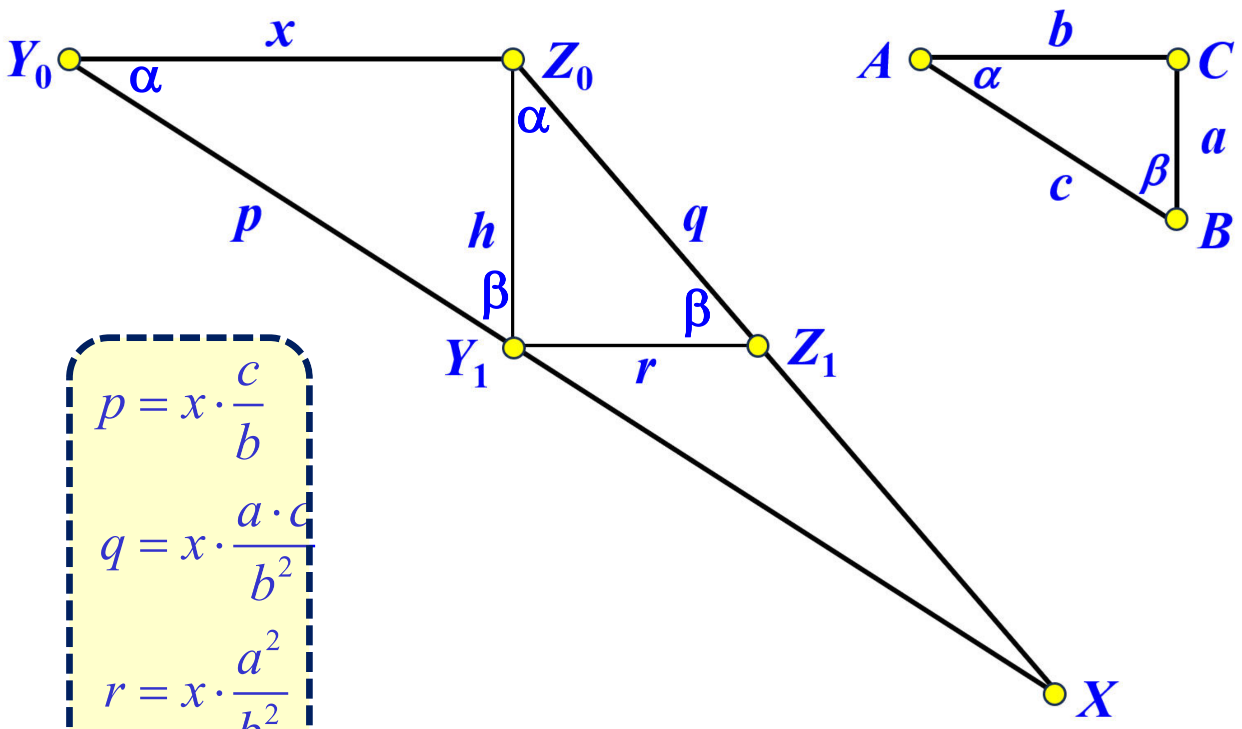
$$h = x\cdot\frac{a}{b} \quad \text{和} \quad p = x\cdot\frac{c}{b}$$

4. 因為 $\Delta Z_0Z_1Y_1$ 和 $\Delta ABC$ 相似，我們得到 $q/h = c/b$ 和 $r/h = a/b$ 以及

$$q = h\cdot\frac{c}{b} = \left(x\cdot\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{b}\right) = x\cdot\frac{a\cdot c}{b^2}$$

$$r = h\cdot\frac{a}{b} = \left(x\cdot\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = x\cdot\frac{a^2}{b^2}$$

# 一個純幾何證明：4/13




$$p = x \cdot \frac{c}{b}$$

$$q = x \cdot \frac{a \cdot c}{b^2}$$

$$r = x \cdot \frac{a^2}{b^2}$$

$$h = x \cdot \frac{a}{b}$$

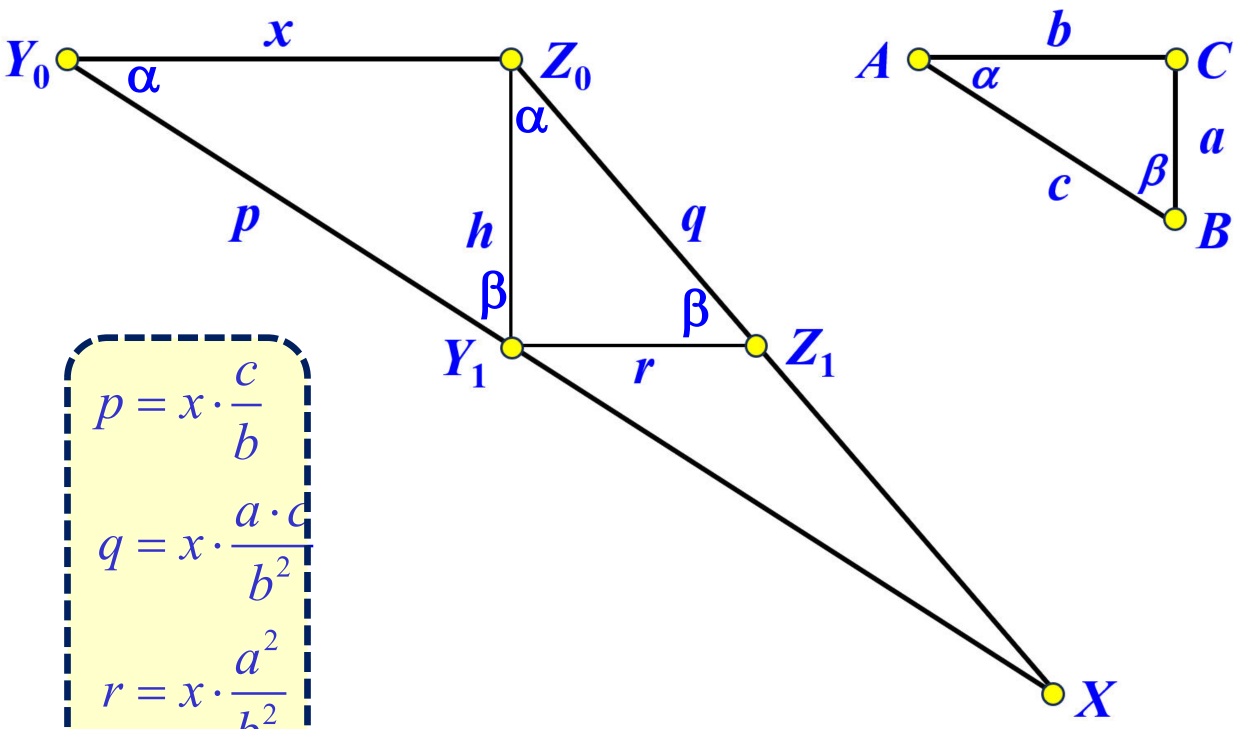
1. 於是梯形 $Y_0Z_0Z_1Y_1$ 的面積是：

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}(Y_0Z_0Z_1Y_1) &= \frac{1}{2}(x+r)\times h \\ &= \frac{1}{2}\left(x + x\cdot\frac{a^2}{b^2}\right)\left(x\cdot\frac{a}{b}\right) \\ &= \frac{x^2}{2}\cdot\frac{a\left(a^2+b^2\right)}{b^3} \end{aligned}$$

2. 從 $\Delta XY_0Z_0$ 縮小到 $\Delta XY_1Z_1$ 的比例因子 ρ 為：

$$\rho = \frac{r}{x} = \frac{x\left(\frac{a}{b}\right)^2}{x} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

# 一個純幾何證明：5/13




$$p = x \cdot \frac{c}{b}$$

$$q = x \cdot \frac{a \cdot c}{b^2}$$

$$r = x \cdot \frac{a^2}{b^2}$$

$$h = x \cdot \frac{a}{b}$$

1. 然後，我們得算出 1 - ρ、 1 - ρ² 和 1/(1 - ρ²)等等如下：

$$\rho = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$1 - \rho = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$$

$$\frac{1}{1-\rho} = \frac{b^2}{b^2 - a^2}$$

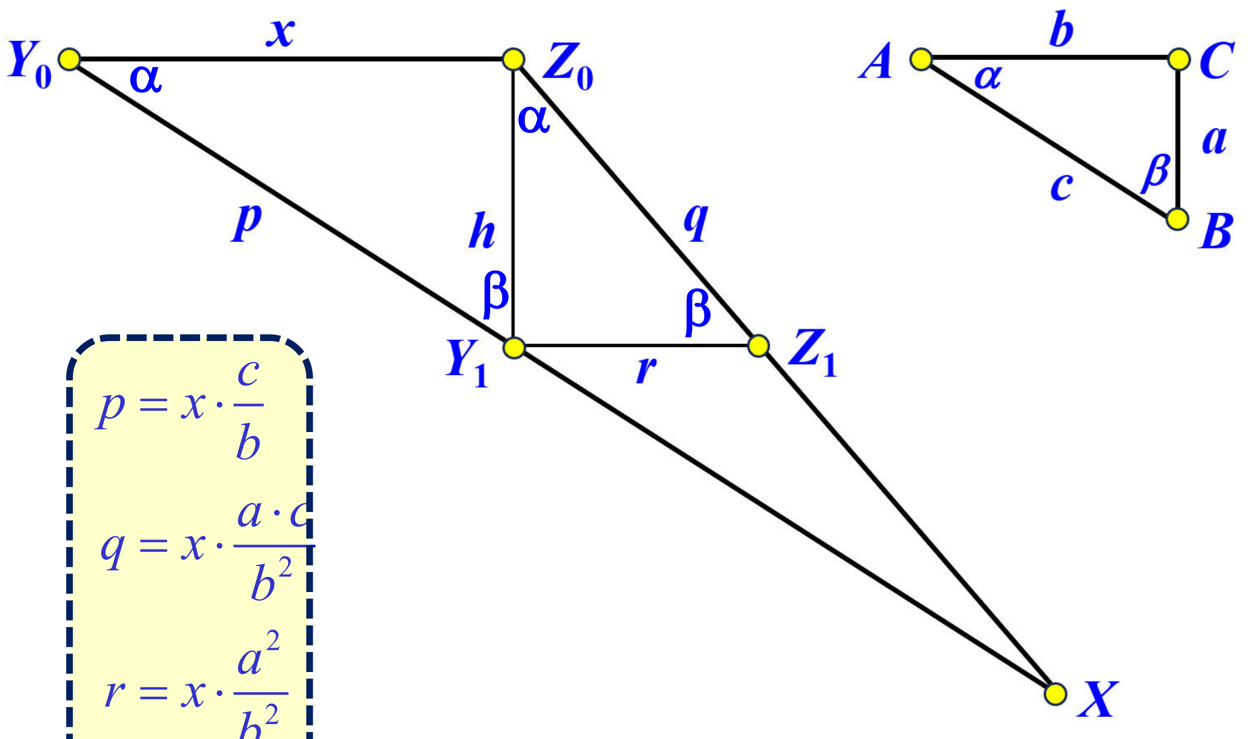
$$\rho^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^4$$

$$1 - \rho^2 = 1 - \left(\frac{a^4}{b^4}\right)$$

$$= \frac{b^4 - a^4}{b^4} = \frac{\left(b^2 - a^2\right)\left(b^2 + a^2\right)}{b^4}$$

$$\frac{1}{1-\rho^2} = \frac{b^4}{\left(b^2 - a^2\right)\left(b^2 + a^2\right)}$$

# 一個純幾何證明：6/13




$$p = x \cdot \frac{c}{b}$$

$$q = x \cdot \frac{a \cdot c}{b^2}$$

$$r = x \cdot \frac{a^2}{b^2}$$

$$h = x \cdot \frac{a}{b}$$

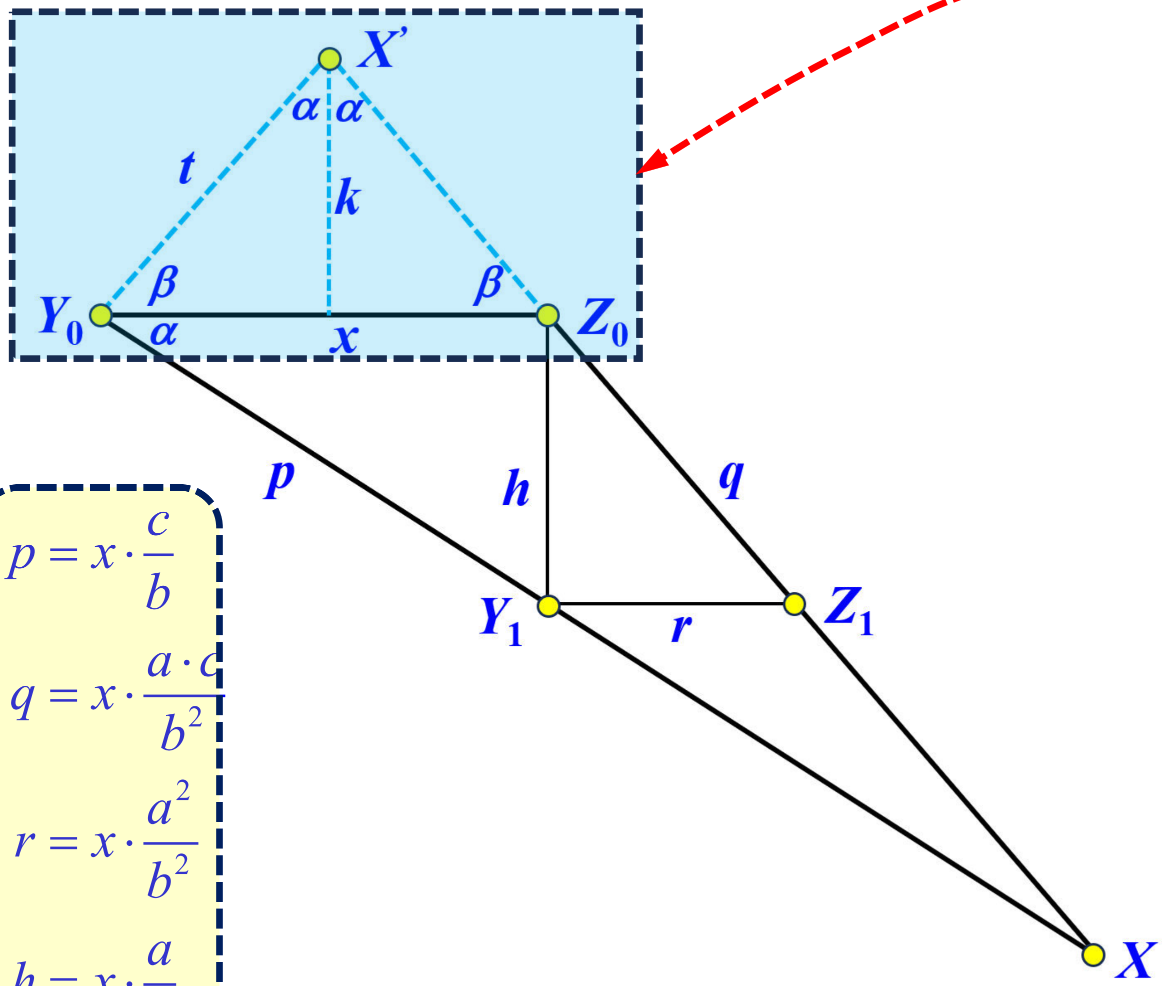
1. 用第二講的手法，三角形 $XY_0Z_0$ 的面積是：

$$\text{Area}(XY_0Z_0) = \frac{1}{1-\rho^2} \cdot \text{Area}(Y_0Z_0Z_1Y_1)$$

$$= \left( \frac{b^4}{(b^2-a^2)\boxed{(b^2+a^2)}} \right) \left( \frac{x^2}{2} \cdot \frac{a\boxed{(a^2+b^2)}}{b^3} \right)$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{b^2-a^2}$$

# 一個純幾何證明：7/13




$p = x \cdot \frac{c}{b}$

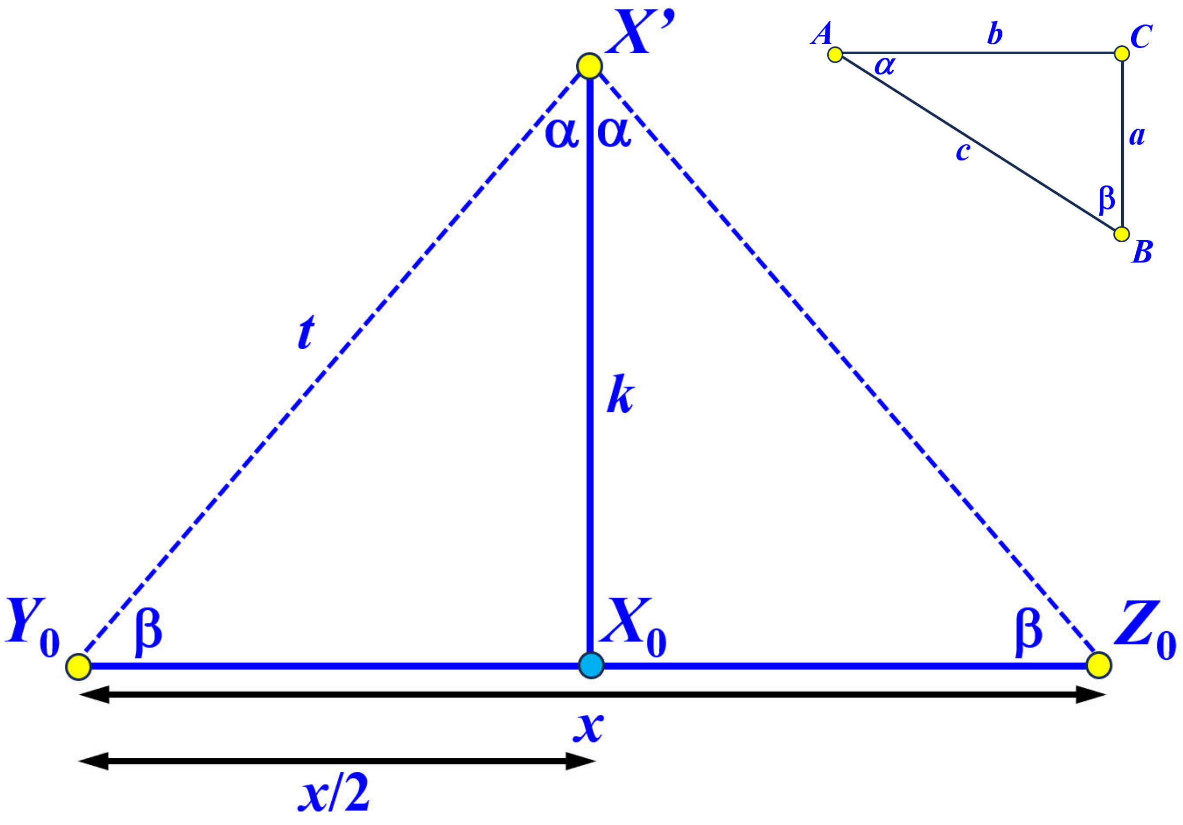
$q = x \cdot \frac{a \cdot c}{b^2}$

$r = x \cdot \frac{a^2}{b^2}$

$h = x \cdot \frac{a}{b}$

1. 以 $Y_0Z_0$ 為底作一個三角形 $\Delta Y_0Z_0X'$ 使得 $\angle X'Y_0Z_0 = \angle X'Z_0Y_0 = \beta$。
2. 令 $k$ 為在底邊 $Y_0Z_0$ 上的高的長度。
3. 於是 $\angle Y_0X'Z_0 = 2\alpha$，而且 $\Delta Y_0Z_0X'$ 是個等腰三角形。
4. 為了算出 $\Delta XY_0X'$ 的面積，我們需要求 $\Delta Y_0Z_0X'$ 的面積。

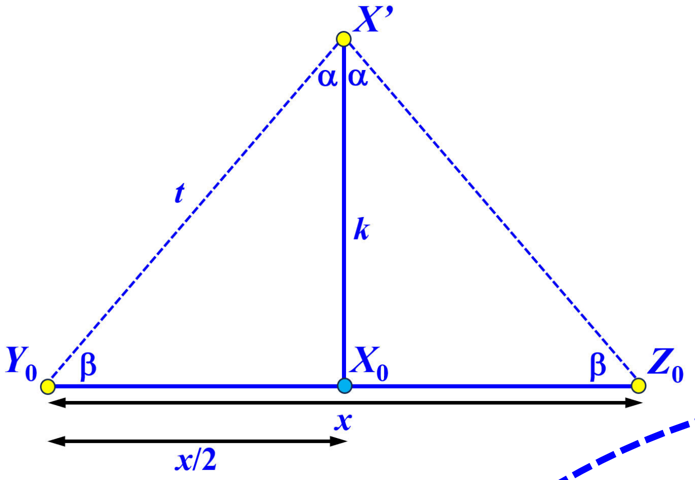
# 一個純幾何證明：8/13




1. $\Delta Y_0Z_0X'$ 的面積是 $(x\times k)/2$ 。
2. 因為 $x$ 已知，我們得算出 $k$ 和 $t$。
3. 令 $X_0$ 為在邊 $Y_0Z_0$ 上高的垂足。
4. 因為 $\Delta X'X_0Y_0$ 和 $\Delta ABC$ 相似，所以得到 $k/(x/2)=b/a$ 和 $t/(x/2) = c/a$。
5. 這樣就有了結果

$$k=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{and} \quad t=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{c}{a}\right)$$

# 一個純幾何證明：9/13




$$k=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$t=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{c}{a}\right)$$

**1. $\Delta X'Y_0Z_0$ 的面積為**

$$\text{Area}(\Delta X'Y_0Z_0)=\frac{1}{2}x\cdot k=\frac{1}{2}x\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$$

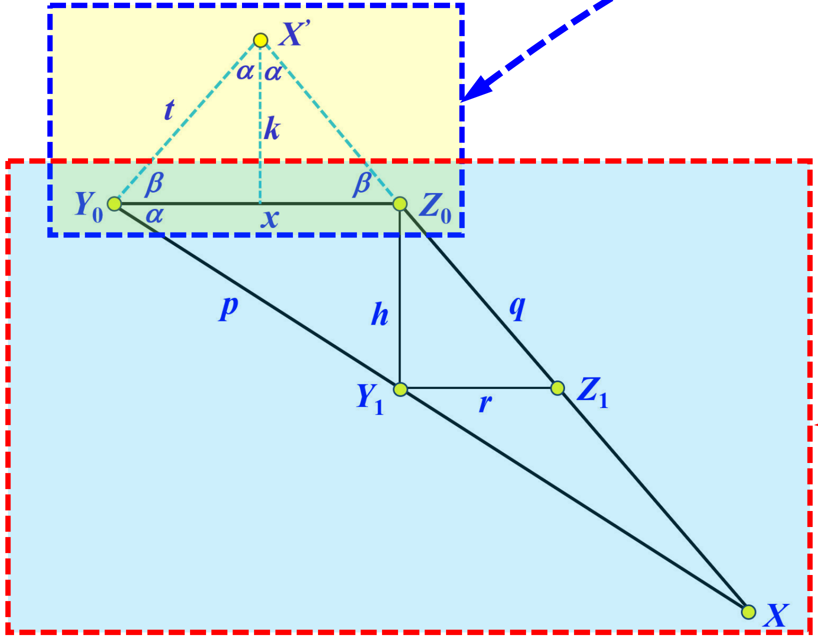
$$=\frac{x^2}{2^2}\left(\frac{b}{a}\right)$$

**2. 因此 $\Delta X'Y_0X$ 的面積為**

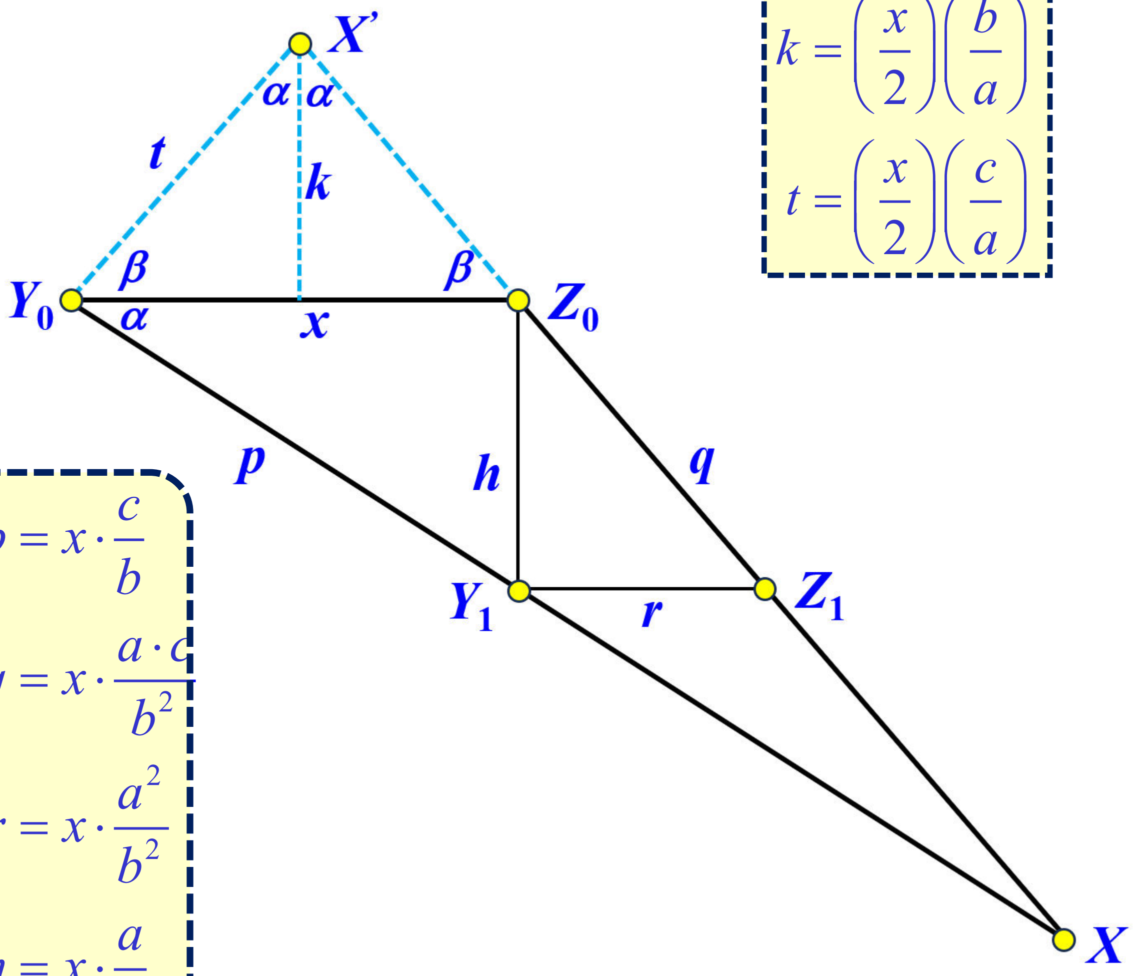
$$\text{Area}(\Delta X'Y_0X)=\boxed{\text{Area}(\Delta X'Y_0Z_0)}+\boxed{\text{Area}(\Delta XY_0Z_0)}$$

$$=\left[\frac{x^2}{2^2}\left(\frac{b}{a}\right)\right]+\left[\frac{x^2}{2}\left(\frac{a\cdot b}{b^2-a^2}\right)\right]$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{b^2+a^2}{2\left(b^2-a^2\right)}$$



# 一個純幾何證明：10/13




$$k=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$t=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$p=x\cdot\frac{c}{b}$$
$$q=x\cdot\frac{a\cdot c}{b^2}$$
$$r=x\cdot\frac{a^2}{b^2}$$
$$h=x\cdot\frac{a}{b}$$

1. $\Delta X'Y_0X$ 的面積為:

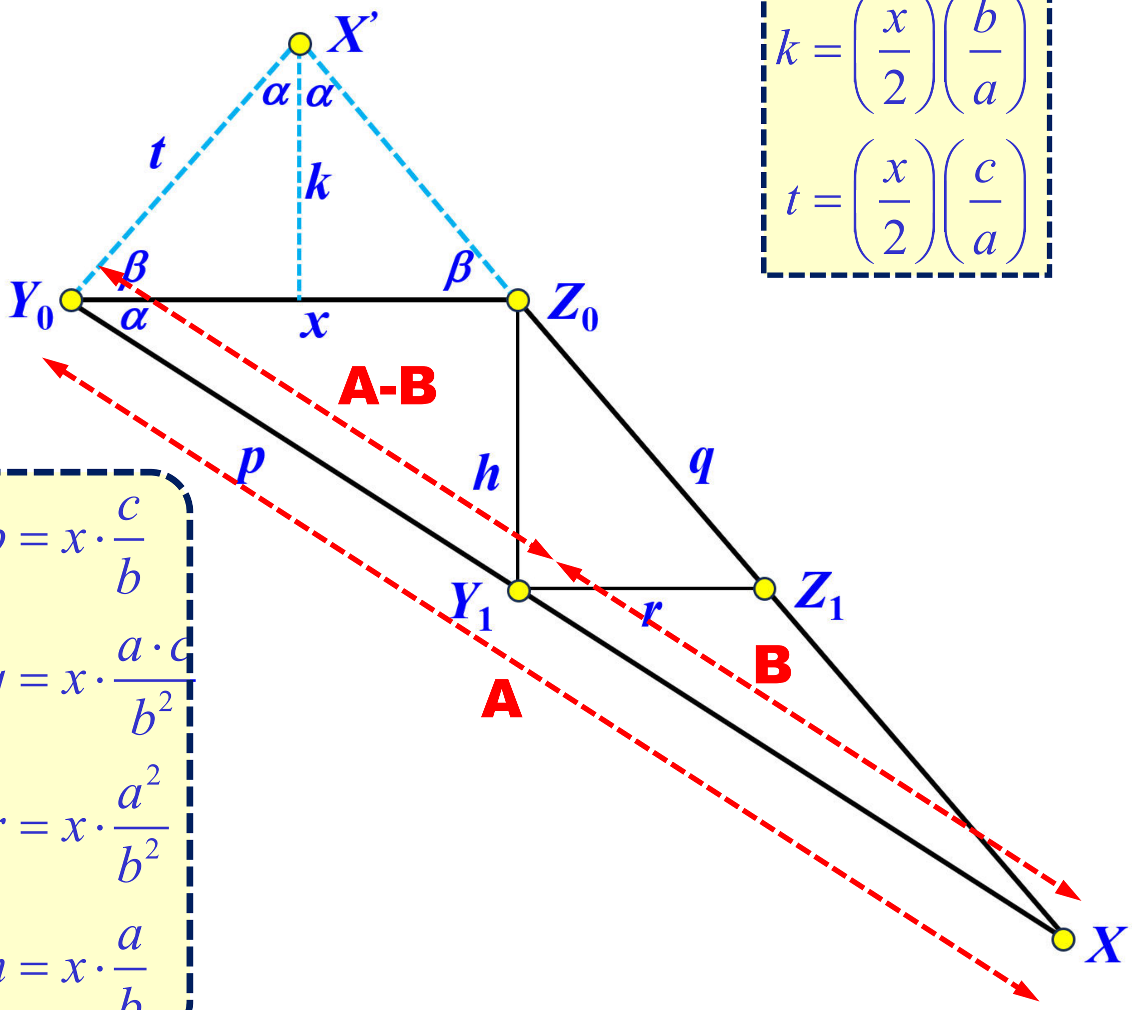
$$\text{Area}(\Delta X'Y_0X)=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{b^2+a^2}{2\left(b^2-a^2\right)}$$

2. 而 $\Delta X'Y_0X$ 是個直角三角型，面積可以這樣算（$t$ 為已知）

$$\text{Area}(X'Y_0X)=\frac{1}{2}t\cdot\overline{XY_0}$$

3. $XY_0$ 的長度呢?
4. 它可以用此地算長度的方法算出來。

# 一個純幾何證明：11/13




$$k=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$t=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$p=x\cdot\frac{c}{b}$$

$$q=x\cdot\frac{a\cdot c}{b^2}$$

$$r=x\cdot\frac{a^2}{b^2}$$

$$h=x\cdot\frac{a}{b}$$

1. 算 $XY_0$ 的方式是這樣的:

$$\overline{XY_0}=\frac{p}{1-\rho}=\left(\frac{b^2}{b^2-a^2}\right)\left(x\cdot\frac{c}{b}\right)=\boxed{x\cdot\frac{b\cdot c}{b^2-a^2}}$$

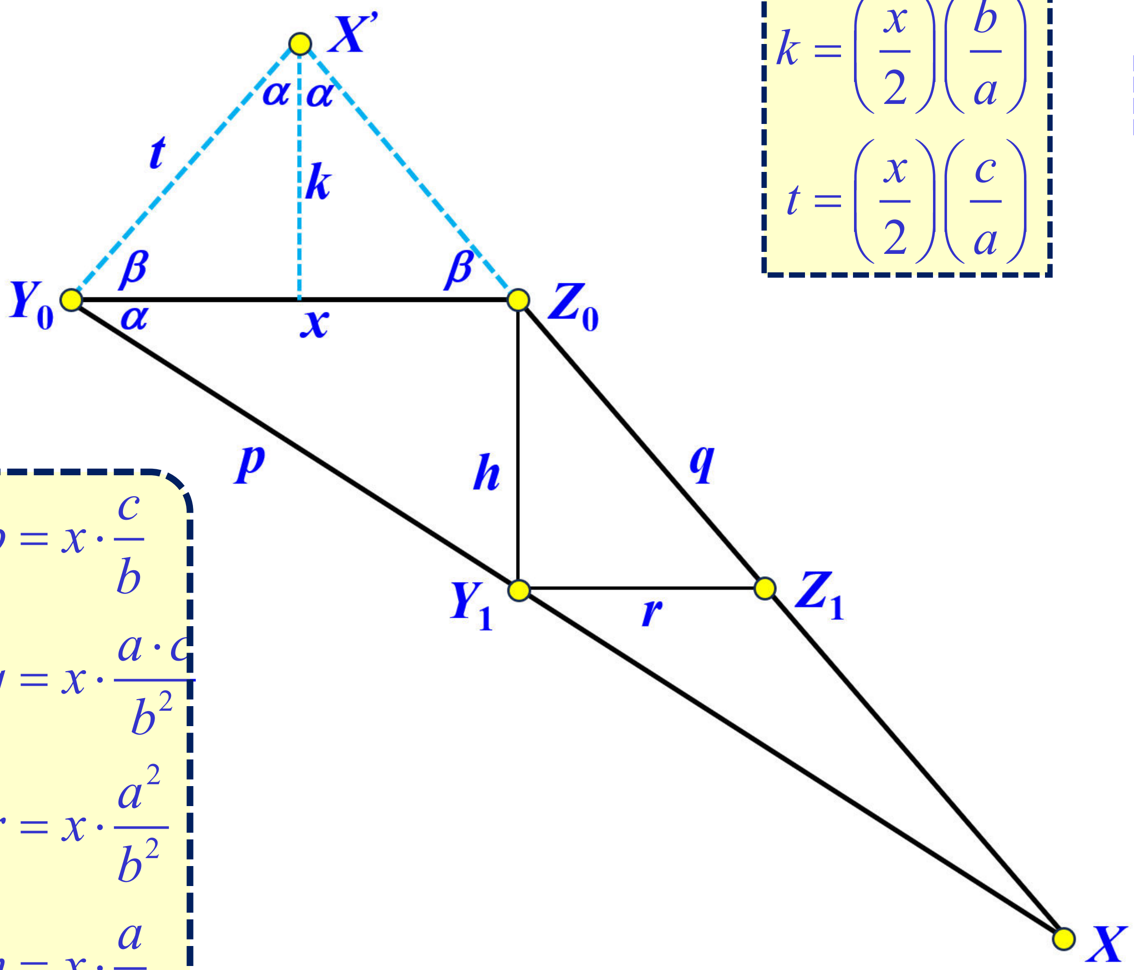
2. 所以 $\Delta XY_0X'$ 的面積是這樣的:

$$\text{Area}(XY_0X')=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\overline{XY_0}=\frac{1}{2}\boxed{\left(\frac{x}{2}\cdot\frac{c}{a}\right)}\boxed{\left(x\cdot\frac{b\cdot c}{b^2-a^2}\right)}$$

$$=\frac{x^2}{2^2}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c^2}{b^2-a^2}$$

3. 但是，這個面積應該和前面算出來的相同。

# 一個純幾何證明：12/13




$$k=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$t=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$p=x\cdot\frac{c}{b}$$

$$q=x\cdot\frac{a\cdot c}{b^2}$$

$$r=x\cdot\frac{a^2}{b^2}$$

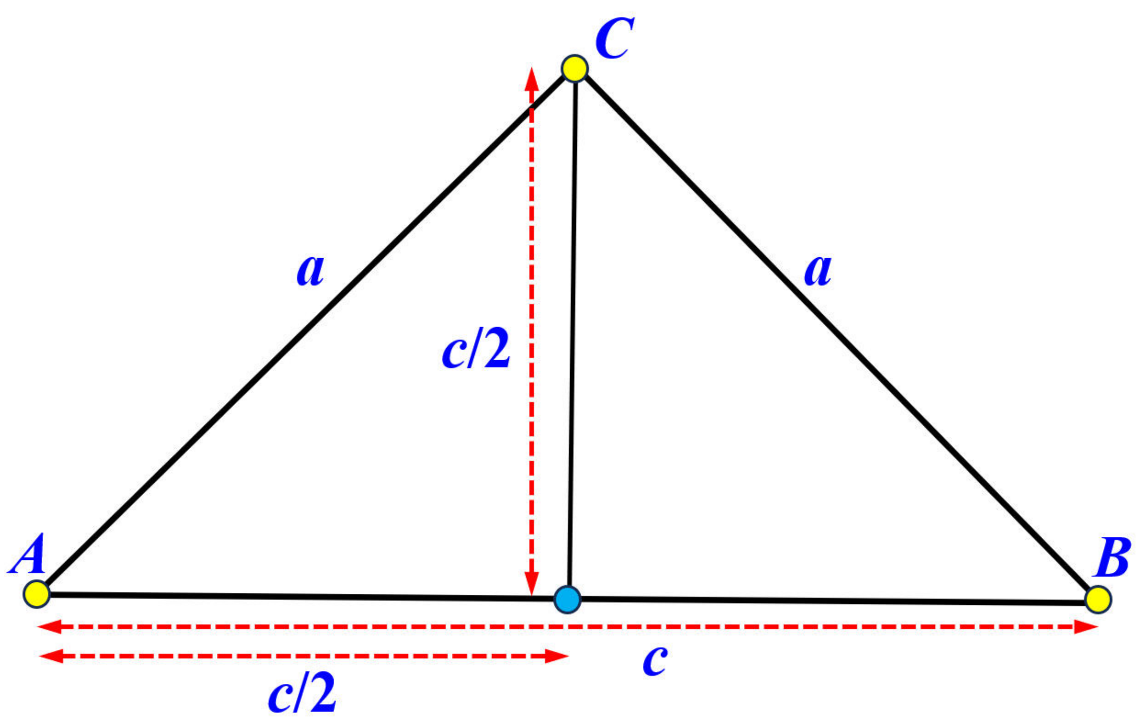
$$h=x\cdot\frac{a}{b}$$

1. **So, we have:**

$$\frac{x^2}{2}\frac{b}{a}\frac{b^2+a^2}{2\left(b^2-a^2\right)}=\text{Area}(\Delta X'Y_0X)=\frac{x^2}{2^2}\frac{b}{a}\frac{c^2}{b^2-a^2}$$

2. **化簡後就得到畢氏定理** $c^2=a^2+b^2$ 。

# 一個純幾何證明：13/13




1. 特殊情況:
   - 若 $a = b$（或 $\alpha = \beta$），$\Delta ABC$ 的面積是

$$\frac{1}{2}(a \cdot a) = \text{Area}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \left(\frac{c}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}(a \cdot a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2}$$

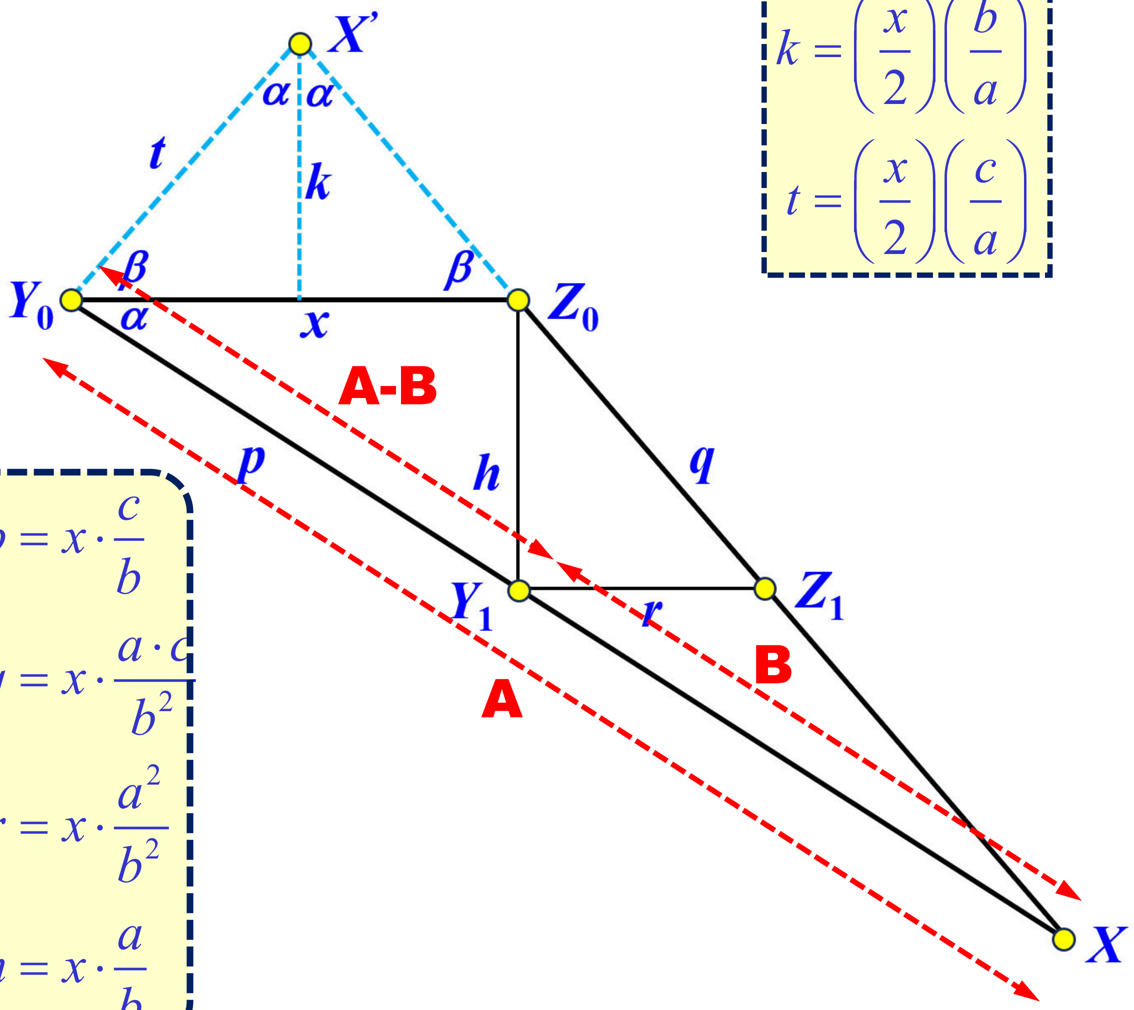
$$2a^2 = c^2$$

$$a^2 + a^2 = c^2$$

   - 所以畢氏定理成立。

# 原來的三角學證明

# 原來的三角學証明：1/4




$$k=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$t=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$p=x\cdot\frac{c}{b}$$

$$q=x\cdot\frac{a\cdot c}{b^2}$$

$$r=x\cdot\frac{a^2}{b^2}$$

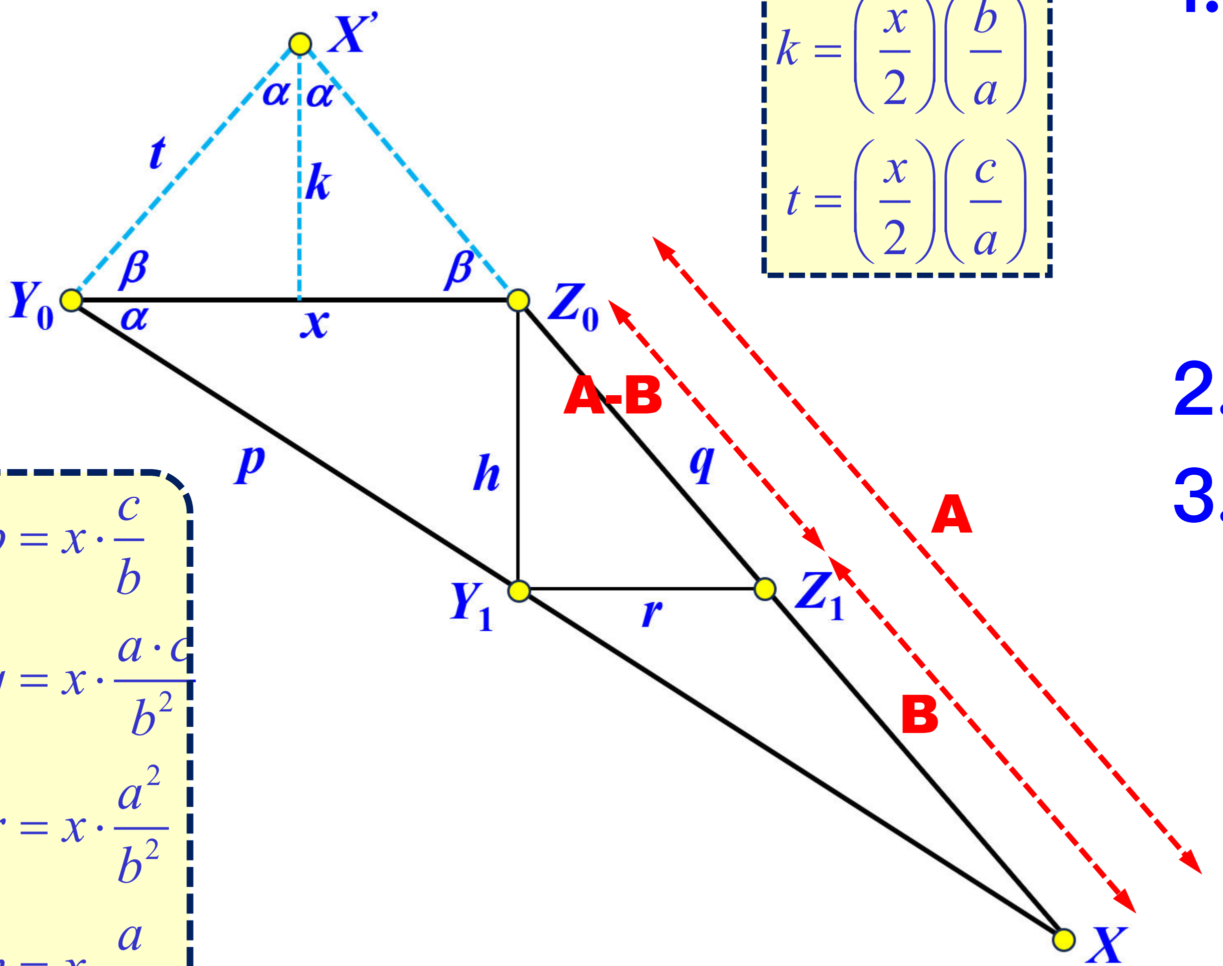
$$h=x\cdot\frac{a}{b}$$

1. **Jackson-Johnson**原來的證明用到很**簡單**的三角學。
2. 我們需要算出 $XY_0$ 和 $XX'$ 這兩個線段的長度。
3. 我們才算過 $XY_0$ 如下：

$$\overline{XY_0}=\frac{1}{1-\rho}\cdot p=x\cdot\frac{b\cdot c}{b^2-a^2}$$

4. $XX'$ 呢？它是 $XZ_0$ 以及 $X'Z_0=t$ 的和。

# 原來的三角學証明：2/4




$$k=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$t=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$p=x\cdot\frac{c}{b}$$

$$q=x\cdot\frac{a\cdot c}{b^2}$$

$$r=x\cdot\frac{a^2}{b^2}$$

$$h=x\cdot\frac{a}{b}$$

1. 用算 $XY_0$ 同樣的方式可以算出 $XZ_0$：

$$\overline{XZ_0}=\frac{1}{1-\rho}\cdot q=x\cdot\frac{a\cdot c}{b^2-a^2}$$

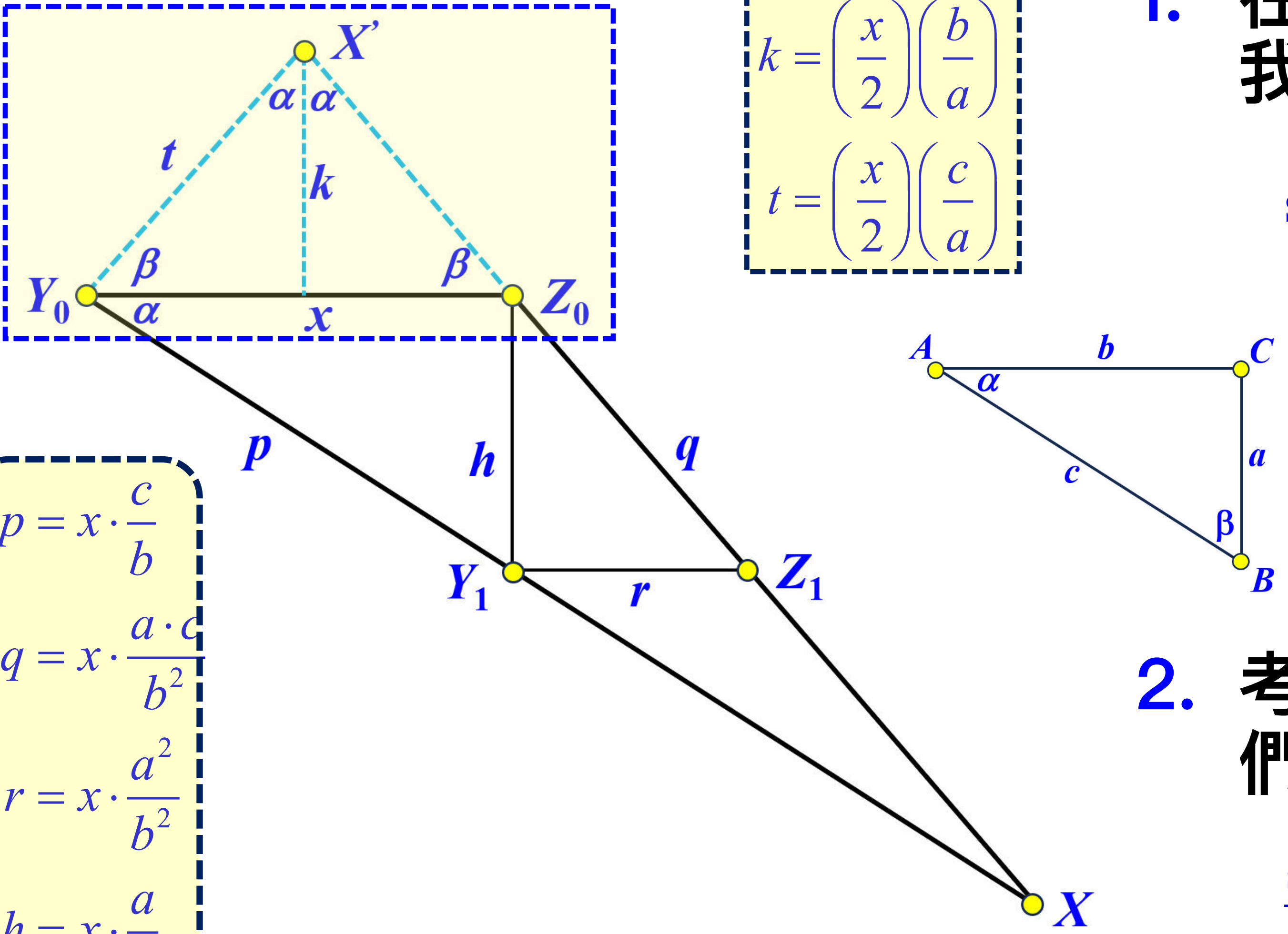
2. 而 $X'Z_0$ 的長度為 $t=(x/2)(c/a)$。
3. 兩者相加得到 $XX'$：

$$\overline{XX'}=t+\overline{XZ_0}$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{c}{a}\right)+x\left(\frac{a\cdot c}{b^2-a^2}\right)$$

$$=(x\cdot c)\frac{a^2+b^2}{2a\left(b^2-a^2\right)}$$

# 原來的三角學証明：3/4




$$k = \left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$t = \left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$p = x\cdot\frac{c}{b}$$

$$q = x\cdot\frac{a\cdot c}{b^2}$$

$$r = x\cdot\frac{a^2}{b^2}$$

$$h = x\cdot\frac{a}{b}$$

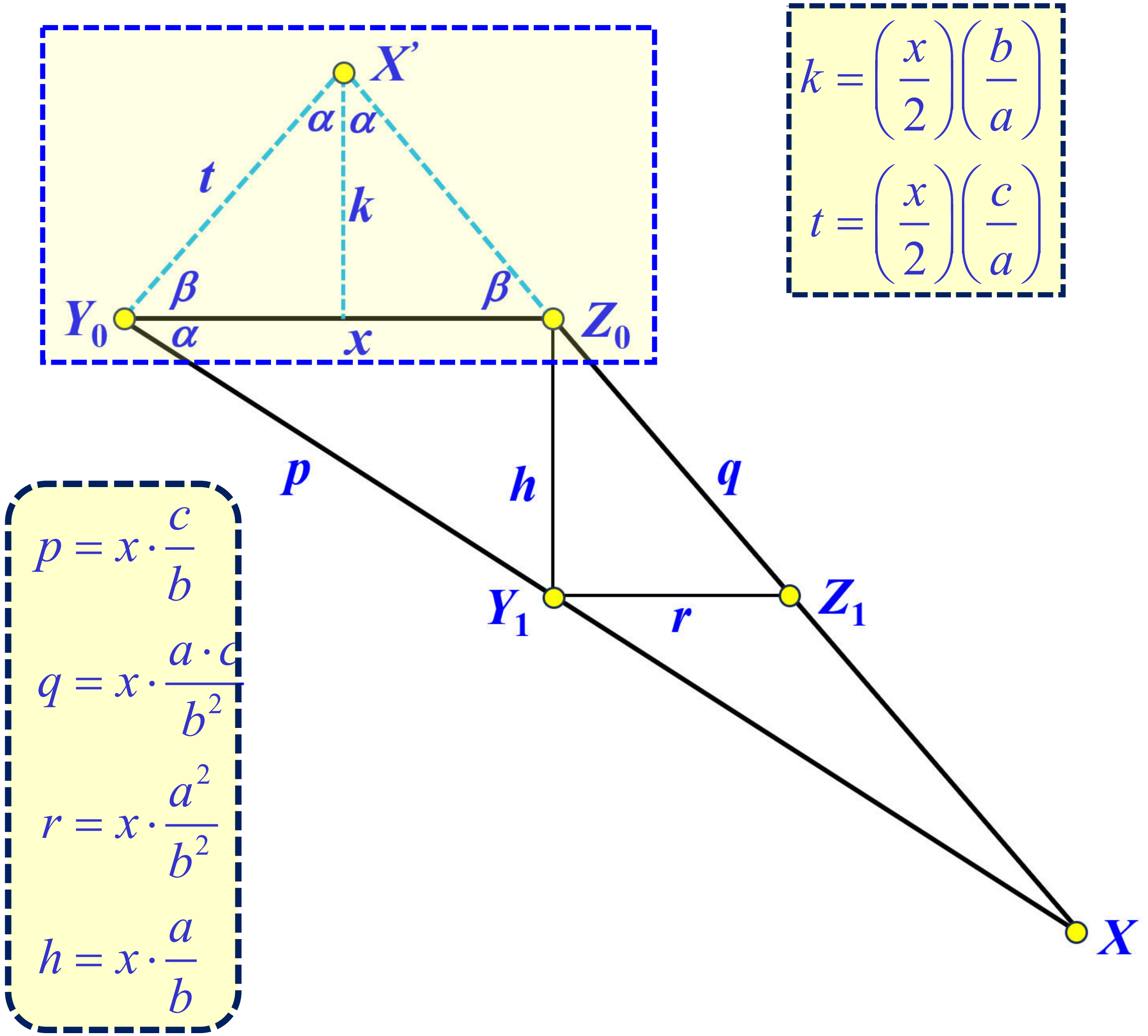
1. 在直角三角形 $\Delta XY_0X'$ 中 $\angle Y_0 = 90°$，我們有：

$$\sin(\angle X') = \sin(2\alpha) = \frac{\overline{XY_0}}{\overline{XX'}} = \frac{x\cdot\frac{b\,c}{\boxed{b^2-a^2}}}{\left(\boxed{x\cdot c}\right)\frac{a^2+b^2}{2a\left(\boxed{b^2-a^2}\right)}} = \frac{2a\cdot b}{a^2+b^2}$$

2. 考慮 $\Delta X'Y_0Z_0$，正弦定律告訴我們：

$$\frac{\sin(2\alpha)}{x} = \frac{\sin(\beta)}{t} = \frac{\frac{b}{c}}{\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{2a\cdot b}{x\cdot c^2}$$

# 原來的三角學証明：4/4




$$k = \left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$t = \left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$p = x \cdot \frac{c}{b}$$

$$q = x \cdot \frac{a \cdot c}{b^2}$$

$$r = x \cdot \frac{a^2}{b^2}$$

$$h = x \cdot \frac{a}{b}$$

1. 因為

$$\frac{\sin(2\alpha)}{x} = \frac{2a \cdot b}{x \cdot c^2}$$

我們得到

$$\sin(2\alpha) = \frac{2a \cdot b}{c^2}$$

2. 這個結果和上一頁得到的結果相同：

$$\frac{2a \cdot b}{c^2} = \sin(2\alpha) = \frac{2a \cdot b}{a^2 + b^2}$$

3. 這樣就得到 $a^2 + b^2 = c^2$。

# 我們學到什麼?

- 我們得到一個 Jackson-Johnson 證明的**純幾何版**。
- 討論了 Jackson-Johnson 原來的、使用三角學的証明，這個三角學的證明可以看成是此地討論的**純幾何証明**的變型。
- 所以，原證明中的三角學部份是可以很容易地被取代的。
- 下面這個英文版網頁上有一篇關於「畢氏定理」的長文（英文）：
  https://pages.mtu.edu/~shene/VIDEOS/GEOMETRY/index-EN.html

# 參考文獻

1. 【冼鏡光初等幾何講堂】 第四講：畢氏定理 – 一個流傳了百來年的錯誤說法，https://youtu.be/JqCQK1kHjKM
2. 【冼鏡光初等幾何講堂】 第五講：畢氏定理 – 新的證明方式，https://youtu.be/7aq4iSdk3d4
3. Ne'Kiya D. Jackson and Calcea Johnson, *An Impossible Proof of Pythagoras*, AMS Spring Southeastern Sectional Meeting, March 18, 2023.
4. Elisha Scott Loomis, *The Pythagorean Proposition*, 2nd edition, The National Council of Teachers of Mathematics, 1940. A scanned PDF file can be found at https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED037335.pdf.

# 結束， 謝謝觀看